鲁东大学学报(自然科学版)
Journal of Ludong University(Natural Science Edition) 2020,36(1):1—8

二分量延迟 Gray-Scott 方程弱解的存在唯一性

姬春婷,辛　杰,刘　辉

(曲阜师范大学　数学科学学院,山东 曲阜 273165)

摘要:本文对空间维数 $n\leqslant 3$ 的有界区域上具有 Neumman 边界条件的二分量延迟 Gray-Scott 方程进行了研究,并通过使用一种新的分解方法证明了二分量延迟 Gray-Scott 方程弱解的存在性和唯一性.

关键词:二分量;延迟 Gray-Scott 方程;弱解;存在性;唯一性

中图分类号:O29　　文献标志码:A　　文章编号:1673-8020(2020)01-0001-08

Gray-Scott 模型最初是由两个常微分方程组成的系统,描述了三次自催化反应的动力学[1—2].最初,这些自催化模型并没有引起研究者们的关注.直到 1993 年,在数值模拟自催化反应扩散方程时发现了大量能自我复制的点状斑图和其它有趣的斑图[3—4].之后,很多有重大意义的研究结果才相继报道出来.假设 A 是一种自催化反应物,在不可逆反应中衰变形成产物 P;而 B 是另一种反应物,其质量分数超过一定数值后自身的移动速率将会增加.这种动力学行为可描述为如下化学反应:

$$2A+B\xrightarrow{k_1}3A,\ A\xrightarrow{k_1}P,$$

其中 k_1 是反应速率常数.由质量守恒定律和菲克定律知,Gray-Scott 方程是由以下两个非线性反应扩散方程组成的方程组:

$$u_t=d_1\Delta u-(F+k)u+u^2v,$$
$$v_t=d_2\Delta v+F(1-v)-u^2v.$$

众所周知,二分量 Gray-Scott 方程在生物学和化学等方面应用广泛[5—9].文献[5]研究了 Gray-Scott 方程的全局吸引子,文献[6]和[7]分别证明了二分量 Gray-Scott 方程的动力学和三分量可逆 Gray-Scott 方程的动力学.文献[8]研究了带有乘性噪声的随机二分量 Gray-Scott 系统随机吸引子的存在性.在此基础上,本文研究具有延迟项的二分量 Gray-Scott 方程解的存在性、唯一性以及关于初值的连续依赖性.延迟项的引入将会使证明过程变得更加复杂,需要对延迟项 $f_1(u^t)$,$f_2(v^t)$,$f_3(w^t)$ 和 $f_4(z^t)$ 施加新的条件.有关延迟项的更多研究,读者可参见文献[10—14].

1　预备知识

设 Ω 是 $R^n(n\leqslant 3)$ 中具有连通开集的有界区域,考虑如下二分量延迟 Gray-Scott 方程弱解的存在唯一性问题:

收稿日期:2019-09-25;修回日期:2019-11-12

基金项目:国家自然科学基金(11371183,11901342);山东省自然科学基金(ZR2013AM004,ZR2018QA002);中国博士后科学基金(2019M652350)

第一作者简介:姬春婷(1995—),女,山东菏泽人,硕士研究生,研究方向为偏微分方程.E-mail:qfjct@sina.com

通信作者简介:辛杰(1974—),男,山东莱阳人,教授,博士研究生导师,博士,研究方向为应用偏微分方程,动力系统.E-mail:fdxinjie@sina.com

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=d_1\Delta u-(F+k)u+u^2v+D_1(w-u)+f_1(u^t),\\ \dfrac{\partial v}{\partial t}=d_2\Delta v+F(1-v)-u^2v+D_2(z-v)+f_2(v^t),\\ \dfrac{\partial w}{\partial t}=d_1\Delta w-(F+k)w+w^2z+D_1(u-w)+f_3(w^t),\\ \dfrac{\partial z}{\partial t}=d_2\Delta z+F(1-z)-w^2z+D_2(v-z)+f_4(z^t).\end{cases}\tag{1}$$

其边界条件和初始条件为:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial n}(t,x)=\frac{\partial v}{\partial n}(t,x)=\frac{\partial w}{\partial n}(t,x)=\frac{\partial z}{\partial n}(t,x)=0,t>0,x\in\partial\Omega;\\&u(t,x)=u^0(x),v(t,x)=v^0(x),x\in\Omega,\\&w(t,x)=w^0(x),z(t,x)=z^0(x),t\in[-\nu,0].\end{aligned}\tag{2}$$

其中: d_1,d_2,F,k,D_1 和 D_2 均是非负常数.

令内积空间 $H=[L^2(\Omega)]^4,E=[H^1(\Omega)]^4,M=\{\varphi\in H^2|\partial\varphi/\partial n(x)=0,x\in\partial\Omega\}]^4$.为了方便,本文用 $\|\cdot\|$ 表示空间 $L^2(\Omega)$ 或 H 的范数并且用 $(\cdot,\cdot)$ 表示其内积,用 $\|\cdot\|_{L^p}$ 表示 $L^p(\Omega)(p\neq2)$ 的范数.对于 $\nu>0,\varphi$ 表示由所有连续函数 $\xi:[-\nu,0]\to H$ 组成的 Banach 空间并且具有上确界范数 $\|\xi\|_{\varphi}=\sup_{s\in[-\nu,0]}\|\xi(s)\|$.对所有实值 $a\leqslant b,t\in[a,b],u^t(s)=u(t+s)$ 表示 φ 的元素,其中 $u:[a-\nu,b]\to H$ 是连续函数,$s\in[-\nu,0]$.类似地,v,w 和 z 均满足上述定义.同时 $f_i(i=1,2,3,4):\xi\to H$ 是非线性连续泛函并且满足下述条件:

(i) $f(0)=0$;

(ii) 存在某个正连续函数 $l_f(r)$ 和正整数 k_0 满足 $\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{l_f(r)}{k_0}=0$,则对所有的 $\zeta,\eta\in\varphi$ 并且有 $\|\zeta\|\leqslant r,\|\eta\|\leqslant r$,使得如下 Lipschitz 连续条件成立

$$\|f(\zeta)-f(\eta)\|\leqslant l_f(r)\|\zeta-\eta\|_{\varphi};$$

(iii) 存在一个正常数 k,使得对所有的 $t>0,u,v,w$ 和 z 均属于 $C([-\nu,t];H)$ 且 $x\in\Omega$ 满足

$$\int_0^t e^{\alpha s}|f_1(u^s)+f_2(v^s)+f_3(w^s)+f_4(z^s)|^2\mathrm{d}s\leqslant k_1^2\int_{-\nu}^t e^{\alpha s}|u(s)+v(s)+w(s)+z(s)|^2\mathrm{d}s,$$

$$\int_0^t e^{\alpha s}|f_2(v^s)|^2\mathrm{d}s\leqslant k_2^2\int_{-\nu}^t e^{\alpha s}|v(s)|^2\mathrm{d}s,$$

$$\int_0^t e^{\alpha s}|f_1(u^s)+f_2(v^s)-f_3(w^s)-f_4(z^s)|^2\mathrm{d}s\leqslant k_3^2\int_{-\nu}^t e^{\alpha s}|u(s)+v(s)-w(s)-z(s)|^2\mathrm{d}s,$$

$$\int_0^t e^{\alpha s}|f_4(z^s)|^2\mathrm{d}s\leqslant k_4^2\int_{-\nu}^t e^{\alpha s}|z(s)|^2\mathrm{d}s,$$

其中 $k=\max\{k_1,k_2,k_3,k_4\}$;

(iv) $F>2k$.

通过使用解析半群定理,定义线性算子:

$$A=\begin{pmatrix}d_1\Delta&0&0&0\\0&d_2\Delta&0&0\\0&0&d_1\Delta&0\\0&0&0&d_2\Delta\end{pmatrix}\tag{3}$$

是希尔伯特空间 H 上一个解析 C_0 半群的生成元.

定义以下非线性映射:

$$h(g)=\begin{pmatrix}-(F+k)u+u^2v+D_1(w-u)\\F(1-v)-u^2v+D_2(z-v)\\-(F+k)w+w^2z+D_1(u-w)\\F(1-z)-w^2z+D_2(v-z)\end{pmatrix} \tag{4}$$

和

$$f(g)=\begin{pmatrix}f_1(u^t)\\f_2(v^t)\\f_3(w^t)\\f_4(z^t)\end{pmatrix}, \tag{5}$$

其中 $g=\mathrm{col}(u,v,w,z)$.

由上述定义(3)~(5)知,初始边界值问题(1)~(2)可以改写成以下形式:

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}=Ag+h(g)+f(g),\ t>0, \tag{6}$$

$$g(0)=g^0=\mathrm{col}(u^0,v^0,w^0,z^0).$$

定义 1[6] 若函数 $g(t,x),(t,x)\in[0,\tau]\times\Omega$ 满足以下条件:

(i) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(g,\zeta)=(Ag,\zeta)+(h(g),\zeta)+(f(g),\zeta)$;

(ii) $g(t,\cdot)\in L^2((0,\tau);E)\cap C_w([-\nu,\tau];H)\cap L^2((0,\tau);H)$;

其中 C_w 是 H 中弱连续函数的值,则称函数 $g(t,x)$ 是抛物发展方程(6)初值问题的一个弱解.

2 解的存在唯一性

参见文献[6]的分解方法,有如下定理:

定理 1 对任意的 $g^0=(u^0,v^0,w^0,z^0)\in H$,二分量延迟 Gray-Scott 方程存在一个全局的、唯一的弱解 $g(t)=(u(t),v(t),w(t),z(t)),t\in[0,\infty)$.

证明 第一步,将方程组 $(1)_2$ 与 v 在 $L^2(\Omega)$ 中取内积和方程组 $(1)_4$ 与 z 在 $L^2(\Omega)$ 中取内积加在一起,得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|v\|^2+\|z\|^2)+d_2(\|\nabla v\|^2+\|\nabla z\|^2)+\frac{F}{2}(\|v\|^2+\|z\|^2)=$$
$$\int_\Omega\left[-u^2v^2-\frac{F}{2}(v-1)^2-w^2z^2-\frac{F}{2}(z-1)^2-D_2(v-z)^2\right]\mathrm{d}x+$$
$$(f_2(v^t),v)+(f_4(z^t),z)+F|\Omega|. \tag{7}$$

利用 Hölder 不等式和 Young 不等式可知

$$(f_2(v^t),v)\leqslant\|f_2(v^t)\|\,\|v\|\leqslant\frac{k_2}{2}\|v\|^2+\frac{1}{2k_2}\|f_2(v^t)\|^2,$$
$$(f_4(z^t),z)\leqslant\|f_4(z^t)\|\,\|z\|\leqslant\frac{k_4}{2}\|z\|^2+\frac{1}{2k_4}\|f_4(z^t)\|^2. \tag{8}$$

进而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|v\|^2+\|z\|^2)+2d_2(\|\nabla v\|^2+\|\nabla z\|^2)+F(\|v\|^2+\|z\|^2)\leqslant$$

$$2F|\Omega|.+k(\|v\|^2+\|z\|^2)+\frac{1}{k_2}\|f_2(v^t)\|^2+\frac{1}{k_4}\|f_4(z^t)\|^2.$$

取足够小的 $\alpha\in(0,\alpha_0)$ **使得** $F>2k+\alpha$**,由式(7)和式(8)得到**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|v\|^2+\|z\|^2)+2d_2(\|\nabla v\|^2+\|\nabla z\|^2)+\alpha(\|v\|^2+\|z\|^2)\leqslant$$

$$2F|\Omega|.-(F-k-\alpha)(\|v\|^2+\|z\|^2)+\frac{1}{k_2}\|f_2(v^t)\|^2+\frac{1}{k_4}\|f_4(z^t)\|^2.$$

上式两边同乘 $e^{\alpha t}$ **并在** $[0,t]$ **上积分,有**

$$e^{\alpha t}(\|v(t)\|^2+\|z(t)\|^2)+2d_2\int_0^t e^{\alpha s}(\|\nabla v\|^2+\|\nabla z\|^2)\,\mathrm{d}s\leqslant$$

$$\|v(0)\|^2+\|z(0)\|^2+\frac{2F|\Omega|.}{\alpha}e^{\alpha t}-(F-k-\alpha)\int_0^t e^{\alpha s}(\|v\|^2+\|z\|^2)\,\mathrm{d}s+$$

$$\frac{1}{k_2}\int_0^t e^{\alpha s}\|f_2(v^s)\|^2\mathrm{d}s+\frac{1}{k_4}\int_0^t e^{\alpha s}\|f_4(z^s)\|^2\mathrm{d}s. \tag{9}$$

由 $f_i(i=1,2,3,4)$ **满足的条件**(iii)**可知**

$$\frac{1}{k_2}\int_0^t e^{\alpha s}\|f_2(v^s)\|^2\mathrm{d}s+\frac{1}{k_4}\int_0^t e^{\alpha s}\|f_4(z^s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant k_2\int_{-\nu}^t e^{\alpha s}\|v(s)\|^2\mathrm{d}s+k_4\int_{-\nu}^t e^{\alpha s}\|z(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant$$

$$k\int_0^t e^{\alpha s}(\|v(s)\|^2+\|z(s)\|^2)\,\mathrm{d}s+k\int_{-\nu}^0 e^{\alpha s}(\|v(s)\|^2+\|z(s)\|^2)\,\mathrm{d}s. \tag{10}$$

再将式(10)代入式(9),由 $f_i(i=1,2,3,4)$ **满足的条件**(iv)**得到**

$$\|v(t)\|^2+\|z(t)\|^2+2d_2\int_0^t e^{\alpha(s-t)}(\|\nabla v\|^2+\|\nabla z\|^2)\,\mathrm{d}s\leqslant$$

$$(1+\nu k)(\|v^0\|_\varphi^2+\|z^0\|_\varphi^2)e^{-\alpha t}+\frac{2F|\Omega|.}{\alpha}-(F-2k-\alpha)\int_0^t e^{\alpha(s-t)}(\|v\|^2+\|z\|^2)\,\mathrm{d}s\leqslant$$

$$(1+\nu k)(\|v^0\|_\varphi^2+\|z^0\|_\varphi^2)e^{-\alpha t}+\frac{2F|\Omega|.}{\alpha}. \tag{11}$$

因此,对 $\rho\in[-\nu,0]$,$t\in(-\rho,T]$ **有**

$$\|v(t+\rho)\|^2+\|z(t+\rho)\|^2\leqslant(1+\nu k)(\|v^0\|_\varphi^2+\|z^0\|_\varphi^2)e^{-\alpha(t+\rho)}+\frac{2F|\Omega|.}{\alpha}\leqslant$$

$$(1+\nu k)(\|v^0\|_\varphi^2+\|z^0\|_\varphi^2)e^{\alpha(\nu-t)}+\frac{2F|\Omega|.}{\alpha}. \tag{12}$$

对 $t\in[0,-\rho]$ **有**

$$\|v(t+\rho)\|^2+\|z(t+\rho)\|^2\leqslant\|v^0\|_\varphi^2+\|z^0\|_\varphi^2\leqslant(1+\nu k)(\|v^0\|_\varphi^2+\|z^0\|_\varphi^2)e^{\alpha(\nu-t)}. \tag{13}$$

则对 $t\in[0,T]$**,利用式(12)和式(13)得到**

$$\|v^t\|_\varphi^2+\|z^t\|_\varphi^2\leqslant(1+\nu k)(\|v^0\|_\varphi^2+\|z^0\|_\varphi^2)e^{\alpha(\nu-t)}+\frac{2F|\Omega|.}{\alpha}. \tag{14}$$

第二步,令 $y(t,x)=u(t,x)+v(t,x)+w(t,x)+z(t,x)$**,由式(1)可得**

$$\frac{\partial y}{\partial t}=d_1\Delta y-(F+k)y+[(d_2-d_1)\Delta(v+z)+k(v+z)+2F]+$$

$$f_1(u^t)+f_2(v^t)+f_3(w^t)+f_4(z^t). \tag{15}$$

将式(15)与 y 在 H 中取内积得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|y\|^2+d_1\|\nabla y\|^2+(F+k)\|y\|^2=$$

$$\int_\Omega[(d_2-d_1)\Delta(v+z)+k(v+z)+2F+f_1(u^t)+f_2(v^t)+f_3(w^t)+f_4(z^t)]y\mathrm{d}x\leqslant$$

$$|d_1-d_2|\|\nabla v+\nabla z\|\|\nabla y\|+k\|v+z\|\|y\|+2F|\Omega|_{\cdot}^{\frac{1}{2}}\|y\|+\|y\|\|f_1(u^t)+f_2(v^t)+f_3(w^t)+f_4(z^t)\|\leqslant$$

$$\frac{d_1}{2}\|\nabla y\|^2+\frac{|d_1-d_2|^2}{d_1}(\|\nabla v\|^2+\|\nabla z\|^2)+k\|y\|^2+\frac{k}{2}(\|v\|^2+\|z\|^2)+\frac{F}{2}\|y\|^2+$$

$$2F|\Omega|_{\cdot}+\frac{k_1}{2}\|y\|^2+\frac{1}{2k_1}\|f_1(u^t)+f_2(v^t)+f_3(w^t)+f_4(z^t)\|^2.$$

进而有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|y\|^2+d_1\|\nabla y\|^2+\alpha\|y\|^2\leqslant$$

$$\frac{2|d_1-d_2|^2}{d_1}(\|\nabla v\|^2+\|\nabla z\|^2)+k(\|v\|^2+\|z\|^2)-(F-k-\alpha)\|y\|^2+$$

$$4F|\Omega|_{\cdot}+\frac{1}{k_1}\|f_1(u^t)+f_2(v^t)+f_3(w^t)+f_4(z^t)\|^2.$$

对上式两边同乘 $e^{\alpha t}$ 并在 $[0,t]$ 上积分有

$$e^{\alpha t}\|y(t)\|^2+d_1\int_0^t e^{\alpha s}\|\nabla y\|^2\mathrm{d}s\leqslant\|y(0)\|^2+\frac{2|d_1-d_2|^2}{d_1}\int_0^t e^{\alpha s}(\|\nabla v\|^2+\|\nabla z\|^2)\mathrm{d}s+$$

$$k\int_0^t e^{\alpha s}(\|v\|^2+\|z\|^2)\mathrm{d}s-(F-k-\alpha)\int_0^t e^{\alpha s}\|y\|^2\mathrm{d}s+\frac{4F|\Omega|_{\cdot}}{\alpha}e^{\alpha t}+$$

$$\frac{1}{k_1}\int_0^t e^{\alpha s}\|f_1(u^s)+f_2(v^s)+f_3(w^s)+f_4(z^s)\|^2\mathrm{d}s. \tag{16}$$

利用 $f_i(i=1,2,3,4)$ 满足的条件(iii)可知

$$\frac{1}{k_1}\int_0^t e^{\alpha s}\|f_1(u^s)+f_2(v^s)+f_3(w^s)+f_4(z^s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant k_1\int_{-\nu}^t e^{\alpha s}\|u(s)+v(s)+w(s)+z(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant$$

$$k\int_0^t e^{\alpha s}\|y(s)\|^2\mathrm{d}s+k\int_{-\nu}^0 e^{\alpha s}\|y(s)\|^2\mathrm{d}s. \tag{17}$$

将式(17)代入到式(16)，再由 Poincare 不等式得到

$$\|y(t)\|^2+d_1\int_0^t e^{\alpha(s-t)}\|\nabla y\|^2\mathrm{d}s\leqslant$$

$$(1+\nu k)\|y^0\|_\varphi^2e^{-\alpha t}+\left(\frac{2|d_1-d_2|^2}{d_1}+\frac{k}{\gamma}\right)\int_0^t e^{\alpha(s-t)}(\|\nabla v\|^2+\|\nabla z\|^2)\mathrm{d}s+\frac{4F|\Omega|_{\cdot}}{\alpha}. \tag{18}$$

结合式(11)可知

$$2d_2\int_0^t e^{\alpha(s-t)}(\|\nabla v(s)\|^2+\|\nabla z(s)\|^2)\mathrm{d}s\leqslant(1+\nu k)(\|v^0\|_\varphi^2+\|z^0\|_\varphi^2)e^{-\alpha t}+\frac{2F|\Omega|_{\cdot}}{\alpha}. \tag{19}$$

再将式(19)代入式(18)，有

$$\|y(t)\|^2\leqslant C(\|u^0\|_\varphi^2+\|v^0\|_\varphi^2+\|w^0\|_\varphi^2+\|z^0\|_\varphi^2)e^{-\alpha t}+\frac{CF|\Omega|_{\cdot}}{\alpha}.$$

因此，对 $\rho\in[-\nu,0]$，$t\in(-\rho,T]$ 有

$$\|y(t+\rho)\|^2 \leqslant C(\|u^0\|_\varphi^2+\|v^0\|_\varphi^2+\|w^0\|_\varphi^2+\|z^0\|_\varphi^2)e^{-\alpha(t+\rho)}+\frac{CF|\Omega|.}{\alpha} \leqslant$$

$$C(\|u^0\|_\varphi^2+\|v^0\|_\varphi^2+\|w^0\|_\varphi^2+\|z^0\|_\varphi^2)e^{\alpha(\nu-t)}+\frac{CF|\Omega|.}{\alpha}. \tag{20}$$

对 $t\in[0,-\rho]$ 有

$$\|y(t+\rho)\|^2 \leqslant \|y^0\|_\varphi^2 \leqslant C(\|u^0\|_\varphi^2+\|v^0\|_\varphi^2+\|w^0\|_\varphi^2+\|z^0\|_\varphi^2)e^{\alpha(\nu-t)}. \tag{21}$$

则对 $t\in[0,T]$，由式(20)和式(21)得到

$$\|y^t\|_\varphi^2 \leqslant C(\|u^0\|_\varphi^2+\|v^0\|_\varphi^2+\|w^0\|_\varphi^2+\|z^0\|_\varphi^2)e^{\alpha(\nu-t)}+\frac{CF|\Omega|.}{\alpha}. \tag{22}$$

此外，令 $p(t)=u(t)+w(t)$，由式(14)和式(22)得到

$$\|p^t\|_\varphi^2=\|u^t+w^t\|_\varphi^2=\|y^t-(v^t+z^t)\|_\varphi^2 \leqslant 2\|y^t\|_\varphi^2+4(\|v^t\|_\varphi^2+\|z^t\|_\varphi^2) \leqslant$$

$$C(\|u^0\|_\varphi^2+\|v^0\|_\varphi^2+\|w^0\|_\varphi^2+\|z^0\|_\varphi^2)e^{\alpha(\nu-t)}+\frac{CF|\Omega|.}{\alpha}. \tag{23}$$

第三步，令 $\psi(t,x)=u(t,x)+v(t,x)-w(t,x)-z(t,x)$，利用式(1)可知

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=d_1\Delta\psi-(F+k+2D_1)\psi+[(d_2-d_1)\Delta(v-z)+(k+2(D_1-D_2))(v-z)]+$$

$$f_1(u^t)+f_2(v^t)-f_3(w^t)-f_4(z^t). \tag{24}$$

将式(24)与 ψ 在 H 中取内积得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\psi\|^2+d_1\|\nabla\psi\|^2+(F+k+2D_1)\|\psi\|^2 \leqslant$$

$$|d_1-d_2|\|\nabla v-\nabla z\|\|\nabla\psi\|+|k+2(D_1-D_2)|\|v-z\|\|\psi\|+\|\psi\|\|f_1(u^t)+f_2(v^t)-f_3(w^t)-f_4(z^t)\| \leqslant$$

$$\frac{d_1}{2}\|\nabla\psi\|^2+\frac{|d_1-d_2|^2}{2d_1}\|\nabla v-\nabla z\|^2+\frac{F+2k+4D_1}{2}\|\psi\|^2+\frac{|k+2(D_1-D_2)|^2}{2(F+2k+4D_1)}\|v-z\|^2+$$

$$\frac{k_3}{2}\|\psi\|^2+\frac{1}{2k_3}\|f_1(u^t)+f_2(v^t)-f_3(w^t)-f_4(z^t)\|^2,$$

进而有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\psi\|^2+d_1\|\nabla\psi\|^2+\alpha\|\psi\|^2 \leqslant$$

$$\frac{2|d_1-d_2|^2}{d_1}(\|\nabla v\|^2+\|\nabla z\|^2)+\frac{2|k+2(D_1-D_2)|^2}{F+2k+4D_1}(\|v\|^2+\|z\|^2)-$$

$$(F-k-\alpha)\|\psi\|^2+\frac{1}{k_3}\|f_1(u^t)+f_2(v^t)-f_3(w^t)-f_4(z^t)\|^2.$$

对上式两边同乘 $e^{\alpha t}$ 并在 $[0,t]$ 上积分有

$$e^{\alpha t}\|\psi(t)\|^2+d_1\int_0^t e^{\alpha s}\|\nabla\psi\|^2\mathrm{d}s \leqslant$$

$$\|\psi(0)\|^2+\frac{2|d_1-d_2|^2}{d_1}\int_0^t e^{\alpha s}(\|\nabla v\|^2+\|\nabla z\|^2)\mathrm{d}s-(F-k-\alpha)\int_0^t e^{\alpha s}\|\psi\|^2\mathrm{d}s+$$

$$\frac{2|k+2(D_1-D_2)|^2}{F+2k+4D_1}\int_0^t e^{\alpha s}(\|v\|^2+\|z\|^2)\mathrm{d}s+\frac{1}{k_3}\int_0^t e^{\alpha s}\|f_1(u^s)+f_2(v^s)-f_3(w^s)-f_4(z^s)\|^2\mathrm{d}s. \tag{25}$$

利用 $f_i(i=1,2,3,4)$ 满足的条件(iii)可知

$$\frac{1}{k_3}\int_0^t e^{\alpha s}\|f_1(u^s)+f_2(v^s)-f_3(w^s)-f_4(z^s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant k_3\int_{-\nu}^t e^{\alpha s}\|u(s)+v(s)-w(s)-z(s)\|^2\mathrm{d}s\leqslant$$
$$k\int_0^t e^{\alpha s}\|\psi(s)\|^2\mathrm{d}s+k\int_{-\nu}^0 e^{\alpha s}\|\psi(s)\|^2\mathrm{d}s. \tag{26}$$

再将式(26)代入到式(25),利用 Poincare 不等式得到

$$\|\psi(t)\|^2+d_1\int_0^t e^{\alpha(s-t)}\|\nabla\psi\|^2\mathrm{d}s\leqslant(1+\nu k)\|\psi^0\|_\varphi^2 e^{-\alpha t}-(F-2k-\alpha)\int_0^t e^{\alpha(s-t)}\|\psi\|^2\mathrm{d}s+$$
$$\left(\frac{2|d_1-d_2|^2}{d_1}+\frac{2|k+2(D_1-D_2)|^2}{(F+2k+4D_1)\gamma}\right)\int_0^t e^{\alpha(s-t)}(\|\nabla v\|^2+\|\nabla z\|^2)\mathrm{d}s. \tag{27}$$

结合式(19)可知

$$\|\psi(t)\|^2\leqslant C(\|u^0\|_\varphi^2+\|v^0\|_\varphi^2+\|w^0\|_\varphi^2+\|z^0\|_\varphi^2)e^{-\alpha t}+\frac{CF|\Omega|.}{\alpha}.$$

因此,对 $\rho\in[-\nu,0]$,$t\in(-\rho,T]$ 有

$$\|\psi(t+\rho)\|^2\leqslant C(\|u^0\|_\varphi^2+\|v^0\|_\varphi^2+\|w^0\|_\varphi^2+\|z^0\|_\varphi^2)e^{-\alpha(t+\rho)}+\frac{CF|\Omega|.}{\alpha}\leqslant$$
$$C(\|u^0\|_\varphi^2+\|v^0\|_\varphi^2+\|w^0\|_\varphi^2+\|z^0\|_\varphi^2)e^{\alpha(\nu-t)}+\frac{CF|\Omega|.}{\alpha}, \tag{28}$$

对 $t\in[0,-\rho]$ 有

$$\|\psi(t+\rho)\|^2\leqslant\|\psi^0\|_\varphi^2\leqslant C(\|u^0\|_\varphi^2+\|v^0\|_\varphi^2+\|w^0\|_\varphi^2+\|z^0\|_\varphi^2)e^{\alpha(\nu-t)}, \tag{29}$$

因此,对 $t\in[0,T]$,由式(28)和式(29)得到

$$\|\psi^t\|_\varphi^2\leqslant C(\|u^0\|_\varphi^2+\|v^0\|_\varphi^2+\|w^0\|_\varphi^2+\|z^0\|_\varphi^2)e^{\alpha(\nu-t)}+\frac{CF|\Omega|.}{\alpha}. \tag{30}$$

此外,令 $q(t)=u(t)-w(t)$,由式(14)和式(30)得

$$\|q^t\|_\varphi^2=\|u^t-w^t\|_\varphi^2=\|\psi^t-(v^t-z^t)\|_\varphi^2\leqslant 2\|\psi^t\|_\varphi^2+4(\|v^t\|_\varphi^2+\|z^t\|_\varphi^2)\leqslant$$
$$C(\|u^0\|_\varphi^2+\|v^0\|_\varphi^2+\|w^0\|_\varphi^2+\|z^0\|_\varphi^2)e^{\alpha(\nu-t)}+\frac{CF|\Omega|.}{\alpha}. \tag{31}$$

因此,根据式(23)和式(31)可知,$\|p^t\|_\varphi^2$ 和 $\|q^t\|_\varphi^2$ 是有界的.又由于 $u(t)=\dfrac{p(t)+q(t)}{2}$,$w(t)=\dfrac{p(t)-q(t)}{2}$,故 $\|u^t\|_\varphi$ 和 $\|w^t\|_\varphi$ 是有界的.所以,二分量延迟 Gray-Scott 方程的解是存在的并且关于初始值具有连续依赖性.此外,解的唯一性可通过 f 满足的利普希茨连续条件(ii)、Gronwall 不等式和常数变易公式等进行证明.

参考文献:

[1] GRAY P,SCOTT S K.Autocatalytic reactions in the isothermal,continuous stirred tank reactor: Isolas and other forms of multistability [J].Chemical Engineering Science,1983,38(1):29-43.

[2] GRAY P,SCOTT S K.Autocatalytic reactions in the isothermal,continuous stirred tank reactor: Oscillationsand instabilities in the system $A+2B\to 3B$; $B\to C$ [J].Chemical Engineering Science,1984,39(6):1087-1097.

[3] LEE K J,MCCORMICK W D,OUYANG Q,et al.Pattern formation by interacting chemical fronts [J].Science,1993,261(5118):192-194.

[4] PEARSON J E.Complex patterns in a simple system [J].Science,1993,261(5118):189-192.

[5] YOU Yuncheng.Global attractor of the Gray-Scott equations [J].Communications on Pure and Applied Analysis,2017,7

(4):947-970.

[6] YOU Yuncheng.Dynamics of two-compartment Gray-Scott equations [J].Nonlinear Analysis,2011,74(5):1969-1986.

[7] YOU Yuncheng.Dynamics of three-component reversible Gray-Scott model [J].Discrete and Continuous Dynamical Systems.Series B,2010,14(4):1671-1688.

[8] JIA Xiaoyao,GAO Juanjuan,DING Xiaoquan.Random attractors for stochastic two-compartment Gray-Scott equations with a multiplicative noise [J].Open Mathematics,2016,14(1):586-602.

[9] KOLOKOLNIKOV T,WEI Juncheng.On ring-like solutions for the Gray-Scott model: existence,instability and self-replicating rings [J].European Journal of Applied Mathematics,2005,16(2):201-237.

[10] DING Xiaoquan,JIANG Jifa.Random attractors for stochastic retarded reaction-diffusion equations on unbounded domains [J].Abstract and Applied Analysis,2013(1/2):1-16.

[11] LI Jin,HUANG Jianhua.Uniform attractors for non-autonomous parabolic equations with delays [J].Nonlinear Analysis: Theory Methods& Applications,2009,71(5):2194-2209.

[12] LIU Hui,GAO Hongjun.Global well-posedness and long time decay of the 3D Boussinesq equations [J].Journal of Differential Equations,2017,263(12):8649-8665.

[13] XIN Jie,WANG Jinrong.Cauchy problem on fractional integro-differential evolution equations with infinite delay in fractional power space [J].International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations,2012,4(4):363.

[14] YAN Weiping,LI Yong,JI Shuguan.Random attractors for first order stochastic retarded lattice dynamical systems [J].Journal of Mathematical Physics,2010,51(3):032702.

The Existence and Uniqueness of Weak Solutions for Two-compartment Retarded Gray-Scott Equation

JI Chunting, XIN Jie, LIU Hui

(School of Mathematical Sciences,Qufu Normal University,Qufu 273165,China)

Abstract: Two-compartment retarded Gray-Scott equation with the Neumann boundary conditions on a bounded domain of space dimension $n \leqslant 3$ was studied in this article.The existence and uniqueness of weak solutions for two-compartment retarded Gray-Scott equation were proved by applying a new decomposition method.

Keywords: two-compartment; retarded Gray-Scott equation; weak solutions; existence; uniqueness

(责任编辑 李秀芳)