鲁东大学学报(自然科学版)
Journal of Ludong University(Natural Science Edition) 2020,36(2):115—120

一类带有多项式源的椭圆型方程边界爆破解的存在性

丛玮炜,王琳琳,樊永红

(鲁东大学 数学与统计科学学院,山东 烟台 264039)

摘要:针对一类带有多项式源的椭圆型方程边界爆破问题,本文利用上下解方法和比较原理,给出了存在唯一解的一个充分条件,并对解在边界附近的渐近行为进行了研究.

关键词:上下解方法;边界爆破问题;比较原理;坐标变换

中图分类号:O175 文献标志码:A 文章编号:1673-8020(2020)02-0115-06

本文考虑如下问题

$$\begin{cases}\Delta u = a(x)u^{q(x)} \text{ in } \Omega,\\ u = \infty \text{ on } \partial\Omega,\end{cases} \tag{1}$$

其中 Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中的一个光滑有界域,$a(x)$ 和 $q(x)$ 均为 μ-Hölder 连续函数,$0<\mu<1$. 边界条件 $u=\infty$ 是指:当 $d(x):=\operatorname{dist}(x,\partial\Omega)\to 0^+$ 时,$u\to\infty$.

另外,权函数 $a(x)$ 具有以下性质:

(i) 假设 Ω 是一个 C^μ 有界域,其中 $0<\mu<1$;权函数 $a(x)$ 是一个局部 μ-Hölder 连续函数,满足

$$C_1 d(x)^{-\gamma}\leqslant a(x)\leqslant C_2 d(x)^{-\gamma},x\in\Omega$$

其中 C_1,C_2,γ 是常数,$C_1,C_2>0,\gamma<2$.

(ii) 假设存在有界正函数 $C_0(x)\in C(\overline{\Omega})$,其中 Ω 是一个 $C^\mu(\Omega)$ 有界域,$0<\mu<1$;权函数 $a(x)$ 是一个局部 μ-Hölder 连续函数,对于任意的 $x_0\in\partial\Omega$ 满足

$$\lim_{x\to x_0} d(x)^\gamma a(x) = C_0(x_0),$$

其中 γ 是常数,$\gamma<2$.

起初,当 $a(x)\equiv 1,q(x)\equiv p$ 时,许多学者对问题(1)中解的存在唯一性做了大量的研究[1—7]. 当 $q(x)\equiv p$ 时,文献[8—9]中证明了问题(1)解的存在性,并得出解的渐近估计式. 随后,Melián 等[10]证明了当问题(1)中 $a(x)\equiv 1$ 时,解的存在唯一性以及渐近估计. 近两年相关问题边界爆破解的研究可参见文献[11—16].

在前人研究的基础上,本文提出一个新的模型(1),在同时含指数源和权函数的情况下,研究解的存在唯一性以及解在边界处的渐近行为.

1 解的存在性

定理 1 假设(i)成立,$q(x)\in C^\mu(\overline{\Omega})$ 且非负,$0<\mu<1$. 若存在 $x_0\in\partial\Omega$,使得 $q(x_0)<1$,则(1)无正解. 另外,在相同条件下,如果 $q(x)$ 在 x_0 的一个邻域内满足 $q(x)\leqslant 1$,则(1)无正解.

证明 设 $B(x_0,r)$ 是一个以 x_0 为球心,r 为半径($r>0$)的球. 选择一个光滑开子集 $D\subset B(x_0,3r)$

收稿日期:2020-01-14;修回日期:2020-03-08

基金项目:国家自然科学基金(11201213);山东省自然科学基金(ZR2015AM026);山东省高校科技发展计划(J15LI07)

第一作者简介:丛玮炜(1995—),女,山东威海人,硕士研究生,研究方向为微分方程及其应用. E-mail:1321438195@qq.com

通信作者简介:王琳琳(1976—),女,山东博兴人,教授,硕士研究生导师,博士,研究方向为非线性分析及其应用. E-mail:wangll_1994@sina.com

$\cap \bar{\Omega}$,使得 $B(x_0, 2r) \cap \partial\Omega \subset \partial D \cap \partial\Omega$. 设 φ 是一个截断函数,在 D 的边界上满足 $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$,在 $B(x_0, r) \cap \partial\Omega$ 上有 $\varphi = 1$,在 $\partial D \cap \partial\Omega \backslash (B(x_0, 2r) \cap \partial\Omega)$ 上有 $\varphi = 0$. 因此当 n 取任意正整数时,以下问题

$$\begin{cases}\Delta w = a(x) w^{q(x)} \text{ in } D, \\ w = n\varphi \text{ on } \partial D\end{cases}$$

有对应的唯一正解 w_n. 如果(1)有正解,在 Ω 的边界上,对任意的 n,有 $u \geqslant n\varphi$. 在 D 内,由比较原理可得 $u \geqslant w_n$.

令 $w_n = n v_n$,其中 v_n 是

$$\begin{cases}\Delta v = a(x) n^{q(x)-1} v^{q(x)} \text{ in } D, \\ v = \varphi \text{ on } \partial D\end{cases}$$

的解. 令 $D_0 = \{x \in D: v_{n+1} < v_n\}$,假设 $D_0 \neq \varnothing$,则在 D_0 内有

$$\Delta v_{n+1} = a(x)(n+1)^{q(x)-1} {v_{n+1}}^{q(x)} \leqslant a(x) n^{q(x)-1} {v_{n+1}}^{q(x)} \leqslant a(x) n^{q(x)-1} {v_n}^{q(x)} = \Delta v_n.$$

即:

$$\begin{cases}\Delta v_{n+1} \leqslant \Delta v_n \text{ in } D, \\ v_{n+1} - v_n = 0 \text{ on } \partial D.\end{cases}$$

由最大值定理可得 $v_{n+1} \geqslant v_n$,与假设矛盾,所以 $v_{n+1} \geqslant v_n$,v_n 在 D 内单调递增. 在 D 的边界处有 $0 \leqslant v_n \leqslant 1$,因此当 $n \to \infty$时,有 $v_n \to v_0$,其中 v_0 在 D 内是调和函数,在 D 的边界上有 $v_0 = \varphi$. 因为 $v_0 > 0$,所以在 $D \cup (B(x_0, r) \cap \partial\Omega)$ 的紧子集上,有 $w_n \to +\infty$ 又因为 $u \geqslant w_n$,所以在 $D \cup (B(x_0, r) \cap \partial\Omega)$ 上有 $u \to +\infty$,与(1)有正解矛盾,因此(1)无正解. 将区域 $B(x_0, r)$ 换成 x_0 的一个邻域,重复上述证明,结果仍成立.

定理2 假设(i)成立,$q(x) \in C^{\mu}(\bar{\Omega})$,$0 < \mu < 1$,$q(x) > 1$,则(1)至少存在一个正解.

证明 先来证明对于任意正整数 n,以下问题

$$\begin{cases}\Delta u = a(x) u^{q(x)} \text{ in } \Omega, \\ u = n \text{ on } \partial\Omega\end{cases} \tag{2}$$

有唯一解 u_n.

当 $a(x)$ 是 Ω 内的有界函数时,即 $\gamma \leqslant 0$,很容易得到 $\underline{u} = 0$ 和 $\bar{u} = n$ 分别为(2)的下解和上解,由此可得解的存在性. 由比较原理可得解的唯一性.

当 $a(x)$ 在 Ω 内无界时,即 $0 < \gamma < 2$,定义

$$a_k(x) = \begin{cases}\left(\dfrac{1}{a(x)} + \dfrac{1}{k}\right)^{-1} \text{ in } \Omega, \\ k \text{ on } \partial\Omega,\end{cases}$$

其中 $a_k(x)$ 随 k 递增,有 $a_k(x) \leqslant a(x) \leqslant C_2 d(x)^{-\gamma}$. 因为 $a_k(x)$ 无界,所以对于每一个固定的 k,问题

$$\begin{cases}\Delta u = a_k(x) u^{q(x)} \text{ in } \Omega, \\ u = n \text{ on } \partial\Omega\end{cases}$$

存在唯一解 $u_{k,n}$,并且 $u_{k,n}$ 随 k 递减. 令

$$\begin{cases}-\Delta\rho = C_2 d(x)^{-\gamma} n^{q(x)} \text{ in } \Omega, \\ \rho = 0 \text{ on } \partial\Omega.\end{cases}$$

利用比较原理和最大值原理可得,此问题存在唯一解 $\rho > 0$. 因为在 Ω 内有 $\Delta(n - \rho) = C_2 d(x)^{-\gamma} n^{q(x)} \geqslant a_k(x)(n-\rho)^{q(x)}$,在 Ω 边界处有 $n - \rho = n$. 在 Ω 内由比较原理可得 $u_{k,n} \geqslant n - \rho$,所以在 $C^1_{loc}(\Omega)$ 内有 $u_{k,n} \to u_n$. 由椭圆方程的正则性控制,u_n 是(2)的解. 由比较原理和最大值原理可得 u_n 的唯一性,并且 u_n 随 n 递增.

选择 $\delta > 0$,并令 $\Omega_\delta = \{x \in \Omega: d(x) < \delta\}$. 在 Ω_δ 内选择一点 x_0,并且有 $d(x_0) = \dfrac{\varepsilon}{2}$,其中 $0 < \varepsilon <$

1. 在 Ω_δ 内，因为 $q(x)>1$，$a(x)>0$，所以存在 a_0，q_0，使得在 $B(x_0,\frac{\varepsilon}{4})$ 内有 $q(x)\geqslant q_0>1$，$a(x)\geqslant a_0>0$，因此在 $B(x_0,\frac{\varepsilon}{4})$ 内有 $\Delta u_n\geqslant a_0 u_n{}^{q_0}$. 由此可得，对于任意的 $x\in B(x_0,\frac{\varepsilon}{4})$，有 $u_n\leqslant U$，其中 U 是

$$\begin{cases}\Delta U=a_0U^{q_0}\ \text{in}\ B(x_0,\frac{\varepsilon}{4}),\\ U=+\infty\ \text{on}\ \partial B(x_0,\frac{\varepsilon}{4})\end{cases}$$

的唯一解. 因此 u_n 在 $B(x_0,\frac{\varepsilon}{4})$ 内一致有界，并且在集合 $\{x\in\Omega:d(x)=\frac{\varepsilon}{2}\}$ 上也是一致有界. 又因为 $\Delta u_n>0$，所以在 $\{x\in\Omega:d(x)>\frac{\varepsilon}{2}\}$ 内有 $u_n\leqslant\sup\limits_{d(x)=\frac{\varepsilon}{2}}u_n$，由此推断 u_n 在 $\{x\in\Omega:d(x)>\frac{\varepsilon}{2}\}$ 区域内都是一致有界的. 令 $\varepsilon\to0$，可得 u_n 在 Ω 内是局部一致有界的，因此 $\{u_n\}$ 中存在子列 $\{u_n{}'\}\to u$，其中 u 在 Ω 内满足 $\Delta u=a(x)u^{q(x)}$. 又因为 u_n 随 n 递增，所以 $\{u_n\}\to u$. 对于任意的 $x\in\partial\Omega$，当 $n\to\infty$ 时，$u\to+\infty$，因此 u 为(1)的正解.

2　解的渐近行为

引理 1　假设(i)成立，如果 $x_0\in\partial\Omega$，使得 $q(x_0)>1$，并且 u 是(1)的正解，则在 x_0 的一个邻域 U 内有

$$C_1{}'d(x)^{-\alpha(x)}\leqslant u(x)\leqslant C_2{}'d(x)^{-\alpha(x)},\tag{3}$$

其中 $C_1{}'$，$C_2{}'$ 是正常数，$\alpha(x)=\frac{\gamma-2}{1-q(x)}$.

证明　选择 x_0 的一个邻域 U'，使得 $U\subset U'$，并且在 U' 内 $q(x)>1$. 对于任意的 $x\in U$，有 $B(x_0,\frac{d(x)}{2})\subset U$. 对于 $x\in U$，$y\in B(0,1)$，定义函数

$$\underline{v}(y)=u(x+\frac{d(x)}{2}y)d(x)^{\alpha(x)}.$$

由此可得

$$\Delta\underline{v}(y)=\frac{1}{4}d(x)^{2+\alpha(x)-\alpha(x)q(x+\frac{d(x)}{2}y)}a(x+\frac{d(x)}{2}y)\underline{v}(y)^{q(x+\frac{d(x)}{2}y)}.$$

因为

$$a(x+\frac{d(x)}{2}y)\geqslant C_1d(x+\frac{d(x)}{2}y)^{-\gamma}\geqslant C_3d(x)^{-\gamma},$$

其中 $C_3=(\frac{3}{2})^{-\gamma}C_1$，所以

$$\Delta\underline{v}(y)\geqslant\frac{C_3}{4}d(x)^{\alpha(x)\{q(x)-q(x+\frac{d(x)}{2}y)\}}\underline{v}(y)^{q(x+\frac{d(x)}{2}y)}.$$

因为 $q(x)$ 为 μ - Hölder 连续函数，所以存在常数 C，使得

$$|q(x)-q(x+\frac{d(x)}{2}y)|\leqslant Cd(x)^{\mu},$$

所以在 $B(0,1)$ 中有

$$\Delta\underline{v}(y)\geqslant C_4\underline{v}(y)^{q(x+\frac{d(x)}{2}y)},$$

其中 C_4 为正常数. 因此 $\underline{v}(y)$ 是

$$\begin{cases}\Delta v(y)=C_4 v(y)^{q(x+\frac{d(x)}{2}y)} \text{ in } B(0,1),\\ v(y)=\infty \text{ on } \partial B(0,1)\end{cases}$$

的下解.

接下来定义 $\bar{v}=A_0\psi^{-\beta}$,其中 β 足够大且满足

$$1+\frac{2}{\beta}<q(x+\frac{d(x)}{2}y),$$

ψ 满足

$$\begin{cases}-\Delta\psi=1 \text{ in} B(0,1),\\ \psi=0 \text{ on } \partial B(0,1).\end{cases}$$

若 A_0 足够大,使得

$$\beta(\beta+1)|\nabla\psi|^2-\beta\psi\Delta\psi\leqslant CA_0{}^{q(x+\frac{d(x)}{2}y)-1}\psi^{\beta+2-\beta q(x+\frac{d(x)}{2}y)}$$

成立,则 $\bar{v}$ 为上述问题的上解. 利用比较原理可得 $v\leqslant\bar{v}$. 令 $y=0$ 可得,当 $x\in U$ 时,有 $u(x)\leqslant A_0\psi(0)^{-\beta}d(x)^{-\alpha(x)}$.

当 $x\in U'$ 时,令 $\mathrm{dist}(\bar{x},x)=d(x)$,其中 $\bar{x}\in\partial\Omega, d(\bar{x}+d(x)\nu(\bar{x}))=d(x)$ (ν 表示单位外法向量). 另外,令 $\Gamma_x=-\frac{3}{4}d(x)\nu(\bar{x})+\frac{d(x)}{4}\Gamma$,其中 $\Gamma=\{y\in\mathbf{R}^N:\frac{1}{2}<|y|<2\}, \varepsilon>0$. 显然 $x\in Q_x$,其中 $Q_x=\Gamma_x\cap\Omega$.

对于任意的 $x\in U$,通过减小 U 的范围,使得 $Q_x\subset U'$. 定义

$$w(y)=u(-\frac{3}{4}d(x)\nu(\bar{x})+\frac{d(x)}{4}y)d(x)^{\alpha(x)},$$

其中 $y\in\widetilde{Q}_x, \widetilde{Q}_x=\Gamma\cap\{y\in\mathbf{R}^N:-\frac{3}{4}d(x)\nu(\bar{x})+\frac{d(x)}{4}y\}$. 由此可得

$$\Delta w(y)=\frac{1}{16}d(x)^{2+\alpha(x)-\alpha(x)q(-\frac{3}{4}d(x)\nu(\bar{x})+\frac{d(x)}{4}y)}a(-\frac{3}{4}d(x)\nu(\bar{x})+\frac{d(x)}{4}y)v(y)^{q(-\frac{3}{4}d(x)\nu(\bar{x})+\frac{d(x)}{4}y)}.$$

因为

$$a(-\frac{3}{4}d(x)\nu(\bar{x})+\frac{d(x)}{4}y)\leqslant C_2 d(-\frac{3}{4}d(x)\nu(\bar{x})+\frac{d(x)}{4}y)^{-\gamma}\leqslant C_5 d(x)^{-\gamma},$$

其中 $C_5=(\frac{1}{4})^{-\gamma}C_2$,所以

$$\Delta w(y)\leqslant\frac{C_5}{16}d(x)^{\alpha(x)\{q(x)-q(-\frac{3}{4}d(x)\nu(\bar{x})+\frac{d(x)}{4}y)\}}w(y)^{q(-\frac{3}{4}d(x)\nu(\bar{x})+\frac{d(x)}{4}y)}.$$

由 $q(x)$ 的 Hölder 连续性可得,在 $\widetilde{Q}_x$ 中,有

$$\Delta w(y)\leqslant C_6 w(y)^{q(-\frac{3}{4}d(x)\nu(\bar{x})+\frac{d(x)}{4}y)},$$

其中 C_6 为正常数. 所以以下问题

$$\begin{cases}\Delta z=C_6 w(y)^{q(-\frac{3}{4}d(x)\nu(\bar{x})+\frac{d(x)}{4}y)} \text{ in } \widetilde{Q}_x,\\ z=1 \text{ on } |y|=\frac{1}{2},\\ z=0 \text{ on } |y|=2\end{cases}$$

有唯一正解 z,并且在 $\widetilde{Q}_x$ 边界上,有 $w\geqslant z$. 由比较原理可得,在 $\widetilde{Q}_x$ 中有 $w\geqslant z$. 当 $y=-\nu(\bar{x})$ 时,因为 $w(y)=u(-\frac{3}{4}d(x)\nu(\bar{x})+\frac{d(x)}{4}y)d(x)^{\alpha(x)}=u(-d(x)\nu(\bar{x}))d(x)^{\alpha(x)}$,则 $u(x)\geqslant z(-\nu(\bar{x}))d(x)^{-\alpha(x)}$. 证毕.

同理,不难得到以下引理

引理2 假设(ii)成立,如果 $x_0\in\partial\Omega$,使得 $q(x_0)>1$,并且 u 是(1)的正解. 则在 x_0 的一个邻域

U 内有

$$C_3{}'d(x)^{-\alpha(x)} \leqslant u(x) \leqslant C_4{}'d(x)^{-\alpha(x)},$$

其中 $C_3{}'$,$C_4{}'$ 是正常数,$\alpha(x) = \dfrac{\gamma-2}{1-q(x)}$.

定理 3　假设(ii)成立,$q(x) \in C^{\mu}(\overline{\Omega})$,其中 $0<\mu<1$. 有一点 $x_0 \in \partial\Omega$ 且 $q(x_0)>1$. 若 u 是(1)的正解,则在 x_0 的一个邻域 U 内有

$$\lim_{x\to x_0} d(x)^{\alpha(x)} u(x) = \left(\frac{\alpha(x_0)(\alpha(x_0)+1)}{C_0(x_0)}\right)^{\frac{1}{q(x_0)-1}}, \tag{4}$$

其中 $\alpha(x) = \dfrac{\gamma-2}{1-q(x)}$.

证明　令 $x_0 \in \partial\Omega$,在 Ω 内选择一列点集 $\{x_n\}$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. 选择 x_0 的一个开邻域 W,使得在 Ω 边界上有一组局部坐标 $\zeta \in C^{2,\mu}$,$\zeta: W \to \mathbf{R}^N$,当且仅当 $\zeta_1(x)>0$ 时,有 $x \in W\cap\Omega$,其中 $\zeta = (\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_N)$,$W\cap\Omega \subset U$,$U$ 即为引理 1 中的区域. 另外假设 $\zeta(x_0)=0$. 在 $\zeta(W\cap\Omega\subset U)$ 内,记 $u(x) = \bar{u}(\zeta(x))$,$q(x) = \bar{q}(\zeta(x))$,$a(x) = \bar{a}(\zeta(x))$,$\alpha(x) = \bar{\alpha}(\zeta(x))$,可得

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(\zeta)\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial\zeta_i\partial\zeta_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(\zeta)\frac{\partial \bar{u}}{\partial\zeta_i} = \bar{a}(\zeta)\bar{u}^{\bar{q}(\zeta)},$$

其中 $a_{ij}(\zeta)$,$b_i(\zeta) \in C^{\mu}$,$a_{ij}(0) = \delta_{ij}$. 用 η_n 表示 $\zeta(x_n)$ 在 $\zeta(W\cap\partial\Omega)$ 上的投影,定义映射 $v_n(y) = \bar{u}(\eta_n + d_n y)d_n^{\alpha_n}$,其中 $d_n = d(\zeta(x_n))$,$\alpha_n = \alpha(\zeta(x_n))$,$\zeta(x_n) = \eta_n + d_n(1,0,\cdots,0)$. $v_n(y)$ 满足以下方程

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(\eta_n + d_n y)\frac{\partial^2 v_n}{\partial y_i\partial y_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(\eta_n + d_n y)\frac{\partial v_n}{\partial y_i} = d_n^{\alpha_n+2-\alpha_n\bar{q}(\eta_n+d_n y)}\bar{a}(\eta_n + d_n y)v_n^{\bar{q}(\eta_n+d_n y)}.$$

由引理 2 可得,$G:=\{y\in\mathbf{R}^N: y_1>0\}$ 上存在一个紧子集 K,存在正常数 C_7,C_8,使得

$$C_7 d_n^{\alpha_n-\bar{\alpha}(\eta_n+d_n y)} y_1^{-\bar{\alpha}(\eta_n+d_n y)} \leqslant v_n \leqslant C_8 d_n^{\alpha_n-\bar{\alpha}(\eta_n+d_n y)} y_1^{-\bar{\alpha}(\eta_n+d_n y)}.$$

根据引理 2 和 $q(x)$ 的 Hölder 连续性可得,当 $n\to\infty$ 时,$d_n^{\alpha_n-\bar{\alpha}(\eta_n+d_n y)} \to 1$ 是一致收敛,其中 $y\in K$. 因此在 $C^2_{loc}(D)$ 上存在一组有界子列 $\{v_n\}$,使得 $v_n \to v^*$. 因此,可以得到

$$\begin{cases}\Delta v^* = C_0(x_0)y_1^{-\gamma}(v^*)^{q(x_0)} & \text{in } D,\\ C_7 y_1^{-\bar{\alpha}(x_0)} \leqslant v^* \leqslant C_8 y_1^{-\bar{\alpha}(x_0)}.\end{cases}$$

由文献[8]可知,上述问题存在唯一解,并有

$$v^* = \left(\frac{\alpha(x_0)(\alpha(x_0)+1)}{C_0(x_0)}\right)^{\frac{1}{q(x_0)-1}} y_1^{-\alpha(x_0)}.$$

令 $y=(1,0,\cdots,0)$,则

$$d_n^{\alpha_n} u(x_n) \to \left(\frac{\alpha(x_0)(\alpha(x_0)+1)}{C_0(x_0)}\right)^{\frac{1}{q(x_0)-1}}.$$

式(4)得证.

3　结语

本文解决了同时含指数源和权函数的椭圆边界爆破问题解的渐近性,下一步将考虑其它项是否干涉解的行为,以及指数源和权函数变号时解的情况.

参考文献:

[1]　LOEEWNER C,NIRENBERG L. Partial differential equations invariant under conformal of projective transformations[J]. Contributions to Analysis (a collection of papers dedicated to Lipman Bers),New York: Academic Press,1974: 245－272.

[2]　KONDRATEV V A,NIKISHKIN V A. Asymptotics,near the boundary,of a solution of a singular boundary value problem for a semilinear elliptic equation[J]. Differential Equations,1990,26: 345－348.

[3] VERON L. Semilinear elliptic equations with uniform blow up on the boundary [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1992,59:231 - 250.

[4] BANDLE C,MARCUS M. 'Large' solutions of semilinear elliptic equations: existence,uniqueness and asymptotic behaviour [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1992,58:9 - 24.

[5] DIAZ G,LETELIER R. Explosive solutions of quasilinear elliptic equations: existence and uniqueness [J]. Nonlinear Analysis,1993,20:97 - 125.

[6] MELIÁN J G,LETELIER R,LIS J S D. Uniqueness and asymptotic behaviour for solutions of semilinear problems with boundary blow-up [J]. Proceedings of the American Mathematical Society,2001,129(12):3593 - 3602.

[7] KIM S. A note on boundary blow-up problem of $\Delta u = u^p$ [J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society,2002,56(1):1 - 6.

[8] CHUAQUI M,CORTAZAR C,ELGURTA M,MELIAN J G. Uniqueness and boundary behavior of large solutions to elliptic problems with singular weights [J]. Communications on Pure and Applied Analysis,2004,3(4):653 - 662.

[9] MELIÁN J G. Nondegeneracy and uniqueness for boundary blow-up elliptic problems [J]. Journal of Differential Equations,2006,223(1):208 - 227.

[10] MELIÁN J G,ROSSI J D,LIS J S D. Large solutions for the Laplacian with a power nonline-arity given by a variable exponent [J]. Annales De Linstitut Henri Poincare,2009,26(3):889 - 902.

[11] ZHANG H W,ZHANG W X,HU Q Y. Global existence and blow-up of solution for the semilinear wave equation with interior and boundary source terms [J]. Boundary Value Problems,2019(1):1 - 10.

[12] CHEN H,XU H Y. Global existence and blow-up in finite time for a class of finitely degenerate semilinear pseudo-parabolic equations [J]. Acta Mathematica Sinica,2019,35(7):1143 - 1162.

[13] MA L,FANG Z B. Blow-up phenomena of solutions for a reaction-diffusion equation with weighted exponential nonlinearity [J]. Computers & Mathematics with Applications,2018,75(8):2735 - 2745.

[14] ALVES C O,SANTOS C A,JIAZHENG Z. Blow-upsolutions for a \$p\$ - Laplacian elliptic equation of logistic type with singular nonlinearity [J]. Topological methods in nonlinear analysis,2019,53(2):747 - 777.

[15] BOSCAGGIN A,DAMBROSIO W,PAPINI D. Multiple positive solutions to elliptic boundary blow-up problems [J]. Journal of Differential Equations,2017,262(12):5990 - 6017.

Existence of Solution for a Class of Elliptic Boundary Blow - up Problem with Polynomial Term

CONG Weiwei, WANG Linlin, FAN Yonghong

(School of Mathematics and Statistics Science,Ludong University,Yantai 264039,China)

Abstract: In this paper,for a class of boundary blow-up problem with the polynomial term,a sufficient condition for the existence and uniqueness of the solution was given by using the upper and lower solution method and the comparison principle,and the asymptotic behavior of the solution near the boundary was studied.

Keywords: upper and lower solution; boundary blow-up problems; comparison; coordinate transformation

(责任编辑 李秀芳)