

对数形式压力下 AR 交通流模型的黎曼问题

张宝云 孙梅娜

(鲁东大学 数学与统计科学学院,山东 烟台 264039)

摘要: 本文研究了在对数形式的压力下 AR 交通流模型的黎曼问题,给出所有情况下的黎曼解,并讨论当压力消失时黎曼解的极限行为。此外,文中详细研究狄拉克激波和真空状态的形成。

关键词: AR 交通流模型;黎曼问题;狄拉克激波;真空状态

中图分类号: O175 文献标志码: A 文章编号: 1673-8020(2020)04-0289-07

描述交通阻塞形成和动态的交通流模型最初由 Berthelin 等人提出,在此之后,许多学者致力于研究各类不同的交通流模型。其中,由 Aw 和 Rascle 所提出的 AR 模型受到广泛的关注,许多学者对这一模型进行了系统的研究,见文献 [1—4]。AR 模型目前被广泛用于研究交通阻塞的形成和动态,同时也是多车道交通流模型^[5—6]、单向流道路网络模型^[7—8]和混合交通流模型^[9]的基础。AR 模型可以表示成

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho(u + p(\rho)))_t + (\rho u(u + p(\rho)))_x = 0, \end{cases}$$

其中, ρ 和 u 分别表示密度和速度,压力 $p(\rho)$ 可表示为^[10]

$$p(\rho) = \begin{cases} \varepsilon \rho^\gamma, & \gamma > 0, \\ \varepsilon \ln \rho, & \gamma = 0. \end{cases}$$

针对 $p(\rho) = \varepsilon \rho^\gamma, \gamma > 0$ 时的压力消失情况,文献 [11] 进行了详细研究。目前,关于 $p(\rho) = \varepsilon \ln \rho$ 的压力消失情况没有相关研究成果。

本文主要讨论 $p(\rho) = \varepsilon \ln \rho$ 的情况。考虑如下形式的 AR 交通流模型

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho(u + \varepsilon \ln \rho))_t + (\rho u(u + \varepsilon \ln \rho))_x = 0 \end{cases} \quad (1)$$

在黎曼初值

$$(\rho, u)(x, 0) = \begin{cases} (\rho_-, u_-), & x < 0, \\ (\rho_+, u_+), & x > 0 \end{cases} \quad (2)$$

下的黎曼问题。这里, ρ 和 u 分别为交通流的密度和速度,且 $\rho_\pm \geq 0, u_\pm \geq 0$ 。

如果令 $\varepsilon \rightarrow 0$,模型 (1) 变为如下所示的零压气体动力学模型 (PGD 模型):

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2)_x = 0. \end{cases} \quad (3)$$

模型 (3) 是一个非严格双曲且完全线性退化的系统,自 1994 年以来得到广泛的研究^[12—13]。在 $u_+ < u_-$ 情况下,其黎曼解由一个 δ -激波组成;在 $u_+ > u_-$ 情况下,其黎曼解由两个接触间断包围真空状态组成。在系统 (2) 和 (3) 的黎曼解中 δ -激波和真空状态的形成已经通过压力消失法得到广泛研究^[14—17]。

本文主要考虑系统 (1) ~ (2) 的黎曼问题,构造出所有情况下的黎曼解,并分析当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时该系统

收稿日期: 2020-04-22; 修回日期: 2020-06-30

基金项目: 国家自然科学基金(11271176); 山东省自然科学基金(ZR2019MA019)

第一作者简介: 张宝云(1995—),女,山东德州人,硕士研究生,研究方向为微分方程及其应用。E-mail: 1357618620@qq.com

通信作者简介: 孙梅娜(1978—),女,山东烟台人,教授,硕士研究生导师,博士,研究方向为微分方程及其应用。E-mail: smnwhy0350

@163.com

的黎曼解。可以得到:当 $u_+ < u_-$ 时,激波 S_1 和接触间断 J_2 在 $x = u_+ t$ 上重合,形成了 δ -激波;当 $u_+ = u_-$ 时, (ρ_-, μ_-) 和 (ρ_+, μ_+) 通过接触间断 J 相连;当 $u_+ > u_-$ 时,系统中的 1-稀疏波 R_1 的波前和波后分别退化为两个接触间断,并且 R_1 的中间状态变为真空状态。

1 系统(1)的黎曼解

本节主要考虑具有黎曼初值(2)时,系统(1)的黎曼解的结构及其对应的基本波。系统(1)可改写为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u + \varepsilon(\ln \rho + 1) & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} u & \rho \\ u^2 + \varepsilon u(\ln \rho + 1) & 2\rho u + \varepsilon \rho \ln \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda - u & -\rho \\ (u + \varepsilon(\ln \rho + 1))(\lambda - u) & \rho(\lambda - 2u - \varepsilon \ln \rho) \end{vmatrix} = 0,$$

通过简单的计算,可以得到特征值分别为

$$\lambda_1 = u - \varepsilon, \lambda_2 = u. \quad (5)$$

易得,当 $\varepsilon > 0$ 时, $\lambda_1 < \lambda_2$ 。也就是说,系统(1)是严格双曲的,其特征值所对应的右特征向量分别为

$$\mathbf{r}_1 = (\rho, -\varepsilon)^T, \mathbf{r}_2 = (1, \rho)^T. \quad (6)$$

令 $\nabla = (\frac{\partial}{\partial \rho}, \frac{\partial}{\partial u})$, 则有 $\nabla \lambda_1 \cdot \mathbf{r}_1 = -\varepsilon \neq 0$, $\nabla \lambda_2 \cdot \mathbf{r}_2 = 0$ 。因此, λ_1 是真正非线性的,对应的基本波是稀疏波或激波; λ_2 是线性退化的,对应的基本波为接触间断。

首先考虑稀疏波解。作自相似变换 $\xi = \frac{x}{t}$, 则系统(1)可化为常微分方程的边值问题

$$\begin{cases} -\xi \rho_\xi + (\rho u)_\xi = 0, \\ -\xi(\rho(u + \varepsilon \ln \rho))_\xi + (\rho u(u + \varepsilon \ln \rho))_\xi = 0. \end{cases} \quad (7)$$

这里,式(7)等价于

$$\begin{pmatrix} u - \xi & \rho \\ (u + \varepsilon(\ln \rho + 1))(u - \xi) & \rho(2u - \xi + \varepsilon \ln \rho) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ u \end{pmatrix}_\xi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

当 $(d\rho, du) = (0, 0)$ 时, (ρ, μ) 为常状态;当 $(d\rho, du) \neq (0, 0)$ 时,通过简便计算得到稀疏波曲线。也就是说,对于一个给定的左状态 (ρ_-, μ_-) , 可得 1-稀疏波曲线如下:

$$R(\rho_-, \mu_-): \xi = \lambda_1 = u - \varepsilon, \rho = \rho_- e^{\frac{u_- - u}{\varepsilon}}, \rho < \rho_-, \mu > \mu_-, \quad (8)$$

且 $\frac{du}{d\rho} = -\frac{\varepsilon}{\rho} < 0$, $\frac{d^2u}{d\rho^2} = \frac{\varepsilon}{\rho^2} > 0$ 。这表明 u 随 ρ 的增加而减小,稀疏波曲线 $R(\rho_-, \mu_-)$ 是凸的。此外,由式

(8)可知,当 $u \rightarrow +\infty$ 时, $\rho \rightarrow 0$, 也就是说,稀疏波曲线 $R(\rho_-, \mu_-)$ 的渐近线为 u 轴的正半轴。

接下来考虑激波解。通过 Rankine-Hugoniot 条件,得到

$$\begin{cases} [\sigma[\rho]] = [\rho u], \\ [\sigma[\rho(u + \varepsilon \ln \rho)]] = [\rho u(u + \varepsilon \ln \rho)]. \end{cases} \quad (9)$$

若 $\sigma = 0$, 则可得到 $(\rho, \mu) = (\rho_-, \mu_-)$; 若 $\sigma \neq 0$, 则得到

$$\rho \rho_- (u - u_-) [u - u_- - \varepsilon(\ln \rho_- - \ln \rho)] = 0, \quad (10)$$

这里,当 $u - u_- = 0$ 时,对应着接触间断 $J(\rho_-, \mu_-)$; 当 $u - u_- - \varepsilon(\ln \rho_- - \ln \rho) = 0$ 时,有 $\rho = \rho_- e^{\frac{u_- - u}{\varepsilon}}$ 。

综上,对于一个给定的左状态 (ρ_-, μ_-) , 1-激波曲线和 2-接触间断分别表示为:

$$S(\rho_-, \mu_-): \sigma = \frac{\rho u - \rho_- u_-}{\rho - \rho_-}, \rho = \rho_- e^{\frac{u_- - u}{\varepsilon}}, \rho > \rho_-, \mu < \mu_-, \quad (11)$$

$$J(\rho_-, \mu_-): \tau = u = u_-. \quad (12)$$

显然, 激波曲线 $S(\rho_-, \mu_-)$ 的单调性与稀疏波曲线 $R(\rho_-, \mu_-)$ 的单调性相同。此外, 由式 (11) 可知, 当 $u = 0$ 时 $\rho = \rho_- e^{\frac{u_-}{\varepsilon}}$, 也就是说, 激波曲线 $S(\rho_-, \mu_-)$ 与 ρ 轴的正半轴交于点 $(0, \rho_- e^{\frac{u_-}{\varepsilon}})$ 。

由图 1 可以看到: 稀疏波曲线与激波曲线在相平面上具有相同的表达式, 所以系统 (1) 属于“Temple 类型”, 并且当且仅当 $J(\rho_-, \mu_-): \tau = u = u_-$ 时, 这些状态集可以通过接触间断与左状态 (ρ_-, u_-) 相连。

同时, 本文可以总结出: 对于一个给定的左状态 (ρ_-, μ_-) 与右状态 (ρ_+, μ_+) 连接的状态集由 1 - 稀疏波曲线 $R(\rho_-, \mu_-)$ 、1 - 激波曲线 $S(\rho_-, \mu_-)$ 、2 - 接触间断 $J(\rho_-, \mu_-)$ 组成, 这些曲线将四分之一相平面 $(\rho, \mu \geq 0)$ 划分为 I、II 两部分 (图 1)。更确切地说, 对于一个给定的左状态 (ρ_-, μ_-) , 当且仅当右状态 (ρ_+, μ_+) 位于部分 I 时, 系统 (1) 的黎曼解表示为 $S + J$; 当且仅当右状态 (ρ_+, μ_+) 位于部分 II 时, 系统 (1) 的黎曼解表示为 $R + J$ 。

2 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 系统 (1) 黎曼解的极限行为

本节考虑当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 具有黎曼初值 (2) 时系统 (1) 的黎曼解的极限。下面分三种情况进行讨论。

1) 当 $u_+ < u_-$ 时, 系统 (1) 的黎曼解由 1 - 激波曲线 S_1 、2 - 接触间断 J_2 、非真空中间常状态 (ρ_*, μ_*) 组成。由图 2 看出, (ρ_-, μ_-) 和 (ρ_*, μ_*) 通过速度为 σ_1 的 1 - 激波曲线 S_1 相连, (ρ_*, μ_*) 和 (ρ_+, μ_+) 通过速度为 τ_2 的 2 - 接触间断 J_2 相连, 即

$$S_1: \sigma_1 = \frac{\rho_* u_* - \rho_- u_-}{\rho_* - \rho_-}, \rho_* = \rho_- e^{\frac{u_- - u_*}{\varepsilon}}, \rho_* > \rho_-, u_* < u_-, \quad (13)$$

和

$$J_2: \tau_2 = u_+ = u_*, \quad (14)$$

其中,

$$(\rho_*, \mu_*) = (\rho_- e^{\frac{u_- - u_+}{\varepsilon}}, \mu_+). \quad (15)$$

因此, 具有黎曼初值 (2) 的系统 (1) 的黎曼解如下所示:

$$(\rho, \mu)(\xi) = \begin{cases} (\rho_-, \mu_-), & -\infty < \xi < \sigma_1, \\ (\rho_*, \mu_*), & \sigma_1 < \xi < \tau_2, \\ (\rho_+, \mu_+), & \tau_2 < \xi < +\infty. \end{cases} \quad (16)$$

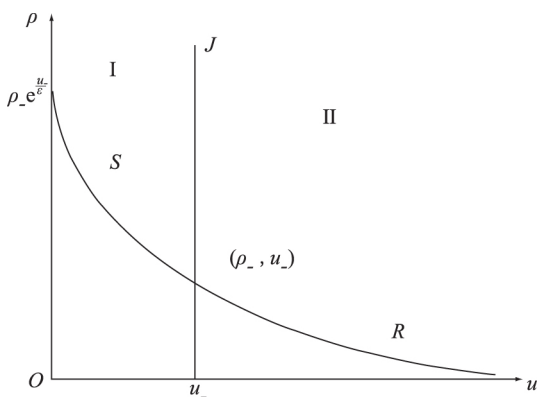


图 1 (ρ, μ) 相平面

Fig. 1 the (ρ, μ) phase plane

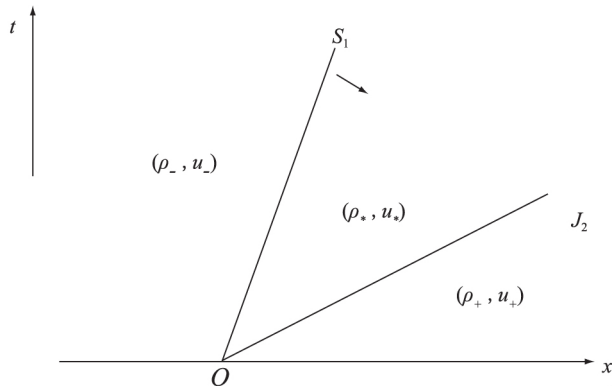


图 2 当 $u_+ < u_-$ 时, 黎曼解的构成

Fig. 2 The composition of the Riemann solution when $u_+ < u_-$

由式 (15) 可以直接得出

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_- e^{\frac{u_- - u_+}{\varepsilon}} = +\infty. \quad (17)$$

此外, 由式 (13) 可得

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\rho_* u_* - \rho_- u_-}{\rho_* - \rho_-} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(u_* + \frac{\rho_- (u_* - u_-)}{\rho_* - \rho_-} \right) = u_+ = \tau_2. \quad (18)$$

这表明,激波 S_1 和接触间断 J_2 在 $x = u_+ t$ 上重合,重新组成一个新的非线性双曲波: δ -激波。

下面引理描述当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,奇异解在直线 $x = u_+ t$ 上的形成。

引理 1 令 $\sigma_\delta = u_+$, 则有下面的极限关系成立:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\tau_2 - \sigma_1) \rho_* = \rho_- (u_- - u_+) = \sigma_\delta [\rho] - [\rho u], \quad (19)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\tau_2 - \sigma_1) \rho_* u_* = \sigma_\delta [\rho u] - [\rho u^2], \quad (20)$$

其中, $[\rho] = \rho(u_+ t + 0 t) - \rho(u_+ t - 0 t)$ 是 ρ 在间断线 $x = u_+ t$ 上的跳跃。

证明 由于 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_* = +\infty$, 根据式(13)、(14)和(17)可以得到

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\tau_2 - \sigma_1) \rho_* &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(u_+ - \frac{\rho_* u_* - \rho_- u_-}{\rho_* - \rho_-} \right) \rho_* = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(u_+ - u_* - \frac{\rho_- (u_* - u_-)}{\rho_* - \rho_-} \right) \rho_* = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\rho_* \rho_- (u_- - u_+)}{\rho_* - \rho_-} = \rho_- (u_- - u_+) = \sigma_\delta [\rho] - [\rho u]. \end{aligned} \quad (21)$$

通过式(9)的第二个方程,有

$$\begin{cases} \sigma_1 (\rho_* u_* + \varepsilon \rho_* \ln \rho_* - \rho_- u_- - \varepsilon \rho_- \ln \rho_-) = \rho_* u_*^2 + \varepsilon \rho_* u_* \ln \rho_* - \rho_- u_-^2 - \varepsilon \rho_- u_- \ln \rho_-, \\ \tau_2 (\rho_+ u_+ + \varepsilon \rho_+ \ln \rho_+ - \rho_* u_* - \varepsilon \rho_* \ln \rho_*) = \rho_+ u_+^2 + \varepsilon \rho_+ u_+ \ln \rho_+ - \rho_* u_*^2 - \varepsilon \rho_* u_* \ln \rho_*, \end{cases}$$

则可得到

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\tau_2 - \sigma_1) \rho_* u_* &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sigma_1 - \tau_2) \varepsilon \rho_* \ln \rho_* - \sigma_1 \rho_- u_- + \tau_2 \rho_+ u_+ - \sigma_1 \varepsilon \rho_- \ln \rho_- + \\ &\quad \tau_2 \varepsilon \rho_+ \ln \rho_+ + \rho_- u_-^2 - \rho_+ u_+^2 + \varepsilon \rho_- u_- \ln \rho_- - \varepsilon \rho_+ u_+ \ln \rho_+ = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (-\sigma_1 \rho_- u_- + \tau_2 \rho_+ u_+ + \rho_- u_-^2 - \rho_+ u_+^2) = \sigma_\delta [\rho u] - [\rho u^2]. \end{aligned} \quad (22)$$

证毕。

由式(19)可以得到, δ -激波的强度和 δ -激波解分别为

$$\bar{\beta}(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\sigma_1 t}^{\tau_2 t} \rho_* dx = \rho_- (u_- - u_+) t, \quad (23)$$

$$(\rho, \mu)(x, t) = \begin{cases} (\rho_-, \mu_-) & x < u_+ t, \\ (\bar{\beta}(t) \cdot \delta(x - u_+ t), \mu_+) & x = u_+ t, \\ (\rho_+, \mu_+) & x > u_+ t. \end{cases} \quad (24)$$

定理 1 对于 $u_+ < u_-$ 的情况,当 ε 足够小时,具有黎曼初值(2)的系统(1)的黎曼解由 1-激波曲线和 2-接触间断组成,且当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,黎曼解收敛于 δ -激波解(24)。同时,在弱的意义下有下面极限关系成立:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho = \rho_- + [\rho] H(x - \sigma t) + t(\sigma_\delta [\rho] - [\rho u]) \delta(x - \sigma_\delta t), \quad (25)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho u = \rho_- u_- + [\rho u] H(x - \sigma t) + t(\sigma_\delta [\rho u] - [\rho u^2]) \delta(x - \sigma_\delta t). \quad (26)$$

证明 对于任意 $\psi(\xi) \in C_0^\infty(-\infty, +\infty)$, 式(16)满足下面的两个弱形式:

$$-\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\xi) (u(\xi) - \xi) \psi'(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\xi) \psi(\xi) d\xi = 0, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} &-\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\xi) u(\xi) (u(\xi) - \xi) \psi'(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\xi) u(\xi) \psi(\xi) d\xi - \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon \rho(\xi) \ln \rho(\xi) (u(\xi) - \xi) \psi'(\xi) d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon \rho(\xi) \ln \rho(\xi) \psi(\xi) d\xi = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

将式(28)的第一项分解为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\xi) u(\xi) (u(\xi) - \xi) \psi'(\xi) d\xi = \left(\int_{-\infty}^{\sigma_1} + \int_{\sigma_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_2}^{+\infty} \right) \rho(\xi) u(\xi) (u(\xi) - \xi) \psi'(\xi) d\xi. \quad (29)$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,式(29)中第一个和第三个积分的极限可以写成

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\sigma_1} \rho(\xi) u(\xi) (u(\xi) - \xi) \psi'(\xi) d\xi + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tau_2}^{+\infty} \rho(\xi) u(\xi) (u(\xi) - \xi) \psi'(\xi) d\xi =$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\sigma_1} \rho_- u_- (u_- - \xi) \psi'(\xi) d\xi + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tau_2}^{+\infty} \rho_+ u_+ (u_+ - \xi) \psi'(\xi) d\xi = \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\rho_- u_-^2 \psi(\sigma_1) - \rho_- u_- \sigma_1 \psi(\sigma_1) - \rho_+ u_+^2 \psi(\tau_2) + \\ & \rho_+ u_+ \tau_2 \psi(\tau_2) + \rho_- u_- \int_{-\infty}^{\sigma_1} \psi(\xi) d\xi + \rho_+ u_+ \int_{\tau_2}^{+\infty} \psi(\xi) d\xi) = \\ & (\sigma_\delta [\rho u] - [\rho u^2]) \psi(\sigma_\delta) + \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho_- u_- + [\rho u] H(\xi - \sigma_\delta)) \psi(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (30)$$

类似地 根据引理 1 及 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_* = u_+$, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时 , 式(29) 中第二个积分的极限为

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\sigma_1}^{\tau_2} \rho(\xi) u(\xi) (u(\xi) - \xi) \psi'(\xi) d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\sigma_1}^{\tau_2} \rho_* u_* (u_* - \xi) \psi'(\xi) d\xi = \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \rho_* u_* (\tau_2 - \sigma_1) u_* \left(\frac{\psi(\tau_2) - \psi(\sigma_1)}{\tau_2 - \sigma_1} \right) - \rho_* u_* (\tau_2 - \sigma_1) \left(\frac{\tau_2 \psi(\tau_2) - \sigma_1 \psi(\sigma_1)}{\tau_2 - \sigma_1} \right) + \right. \\ & \left. \rho_* u_* (\tau_2 - \sigma_1) \left(\frac{\int_{\sigma_1}^{\tau_2} \psi(\xi) d\xi}{\tau_2 - \sigma_1} \right) \right\} = \\ & (\sigma_\delta [\rho u] - [\rho u^2]) (\sigma_\delta \psi'(\sigma_\delta) - \sigma_\delta \psi'(\sigma_\delta) - \psi(\sigma_\delta) + \psi(\sigma_\delta)) = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

此外 , 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时 , 式(28) 中第三项和第四项的极限分别为

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\sigma_1} + \int_{\sigma_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_2}^{+\infty} \right) \varepsilon \rho(\xi) \ln \rho(\xi) (u(\xi) - \xi) \psi'(\xi) d\xi = \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \rho_- \ln \rho_- u_- \psi(\sigma_1) - \varepsilon \rho_- \ln \rho_- \sigma_1 \psi(\sigma_1) + \varepsilon \rho_- \ln \rho_- \int_{-\infty}^{\sigma_1} \psi(\xi) d\xi - \\ & \varepsilon \rho_+ \ln \rho_+ u_+ \psi(\tau_2) + \varepsilon \rho_+ \ln \rho_+ \tau_2 \psi(\tau_2) + \varepsilon \rho_+ \ln \rho_+ \int_{\tau_2}^{+\infty} \psi(\xi) d\xi + \\ & \varepsilon \rho_* \ln \rho_* u_* (\psi(\tau_2) - \psi(\sigma_1)) - \varepsilon \rho_* \ln \rho_* (\tau_2 \psi(\tau_2) - \sigma_1 \psi(\sigma_1)) + \\ & \varepsilon \rho_* \ln \rho_* \int_{\sigma_1}^{\tau_2} \psi(\xi) d\xi) = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-\infty}^{\sigma_1} + \int_{\sigma_1}^{\tau_2} + \int_{\tau_2}^{+\infty} \right) \varepsilon \rho(\xi) \ln \rho(\xi) \psi(\xi) d\xi = \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon \rho_- \ln \rho_- \int_{-\infty}^{\sigma_1} \psi(\xi) d\xi + \varepsilon \rho_* \ln \rho_* \int_{\sigma_1}^{\tau_2} \psi(\xi) d\xi + \varepsilon \rho_+ \ln \rho_+ \int_{\tau_2}^{+\infty} \psi(\xi) d\xi) = 0. \end{aligned} \quad (33)$$

将式(30) ~ (33) 代入式(28) 的极限形式后 , 可得

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho(\xi) u(\xi) - \rho_0 u_0(\xi - \sigma_\delta)) \psi(\xi) d\xi = (\sigma_\delta [\rho u] - [\rho u^2]) \psi(\sigma_\delta). \quad (34)$$

同理 , 由式(27) 可以推出

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} (\rho(\xi) - \rho_0(\xi - \sigma_\delta)) \psi(\xi) d\xi = (\sigma_\delta [\rho] - [\rho u]) \psi(\sigma_\delta), \quad (35)$$

其中 ,

$$\rho_0 u_0(\xi - \sigma_\delta) = \rho_- u_- + [\rho u] H(\xi - \sigma_\delta), \quad \rho_0(\xi - \sigma_\delta) = \rho_- + [\rho] H(\xi - \sigma_\delta). \quad (36)$$

为了求得当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时 , ρ 和 ρu 的极限 , 令 $\varphi(\xi) \in C_0^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}_+)$, 则由式(34) , 有

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho u \left(\frac{x}{t} \right) \varphi(x, t) dx dt = \\ & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} t \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\xi) u(\xi) \varphi(\xi t, t) d\xi \right) dt = \int_0^{+\infty} t \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(\xi) u(\xi) \varphi(\xi t, t) d\xi \right) dt = \\ & \int_0^{+\infty} t \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0 u_0(\xi - \sigma_\delta) \varphi(\xi t, t) d\xi + (\sigma_\delta [\rho u] - [\rho u^2]) \varphi(\sigma_\delta t, t) \right) dt = \\ & \int_0^{+\infty} t \left(t^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0 u_0(x - \sigma_\delta t) \varphi(x, t) dx + (\sigma_\delta [\rho u] - [\rho u^2]) \varphi(\sigma_\delta t, t) \right) dt = \\ & \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0 u_0(x - \sigma_\delta t) \varphi(x, t) dx dt + \int_0^{+\infty} t (\sigma_\delta [\rho u] - [\rho u^2]) \varphi(\sigma_\delta t, t) dt. \end{aligned}$$

结合式(35) 得

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho\left(\frac{x}{t}\right) \varphi(x, t) dx dt = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(x - \sigma_\delta t) \varphi(x, t) dx dt + \int_0^{+\infty} t(\sigma_\delta [\rho] - [\rho u]) \varphi(\sigma_\delta t, t) dt,$$

其中, $\rho_0 u_0$ 和 ρ_0 与式(36) 相同。根据引理1 极限关系式(25) 和(26) 成立。证毕。

2) 当 $u_+ = u_-$ 时, 对于任意的 $\varepsilon > 0$, (ρ_-, μ_-) 和 (ρ_+, μ_+) 可以通过一个2-接触间断 $J: u = u_- = u_+$ 直接相连。

3) 当 $u_+ > u_-$ 时, 具有黎曼初值(2) 的系统(1) 的黎曼解由1-稀疏波 R_1 、2-接触间断 J_2 、非真空中间常状态 (ρ_*, μ_*) 组成, 如图3所示。即

$$R_1: \xi = \lambda_1 = u - \varepsilon, \rho_* = \rho_- e^{\frac{u_- - u_*}{\varepsilon}}, \rho_* < \rho_-, u_* > u_-, \quad (37)$$

和

$$J_2: \tau_2 = u_+ = u_*. \quad (38)$$

因此, 具有黎曼初值(2) 的系统(1) 的黎曼解如下所示:

$$(\rho, \mu)(\xi) = \begin{cases} (\rho_-, \mu_-), & -\infty < \xi < \lambda_1(\rho_-, \mu_-), \\ R_1, & \lambda_1(\rho_-, \mu_-) \leq \xi \leq \lambda_1(\rho_*, \mu_*), \\ (\rho_*, \mu_*), & \lambda_1(\rho_*, \mu_*) \leq \xi \leq u_+, \\ (\rho_+, \mu_+), & \mu_+ < \xi < +\infty, \end{cases} \quad (39)$$

其中,

$$(\rho_*, \mu_*) = \left(\rho_- e^{\frac{u_- - u_+}{\varepsilon}}, \mu_+\right). \quad (40)$$

注意到, 由式(37) 可以得到

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_1(\rho_-, \mu_-) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u_- - \varepsilon) = u_-, \quad (41)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda_1(\rho_*, \mu_*) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u_+ - \varepsilon) = u_+. \quad (42)$$

此外, 对于任意一点 (ρ, μ) 且 $u_- < u < u_*$, 有 $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho_- e^{\frac{u_- - u}{\varepsilon}} = 0$ 。也就是说, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 1-稀疏波曲线 R_1 的波后退化为接触间断 $J_2^1: u = u_-$, 而其波前退化为接触间断 $J_2^2: u = u_+$, R_1 的中间状态变为真空状态。

参考文献:

[1] AW A, RASCLE M. Resurrection of “second order” models of traffic flow [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2000, 60(3): 916-938.
 [2] ZHANG H M. A non-equilibrium traffic model devoid of gas-like behavior [J]. Transportation Research Part B, 2002, 36(3): 275-290.
 [3] BERTHELIN F, DEGOND P, DELITALA M et al. A model for the formation and evolution of traffic jams [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2008, 187(2): 185-220.
 [4] DI FRANCESCO M, FAGIOLI S. Many particle approximation of the Aw-Rascle-Zhang second order model for vehicular traffic [J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2017, 14(1): 127-141.
 [5] GREENBERG J M. Extensions and amplifications of a traffic model of Aw and Rascle [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2001, 62(3): 729-745.
 [6] GREENBERG J M, KLAR A, RASCLE M. Congestion on multilane highways [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 2003, 63(3): 818-833.
 [7] GARAVELLO M, PICCOLI B. Traffic flow on a road network using the Aw-Rascle model [J]. Communication in Partial Dif-

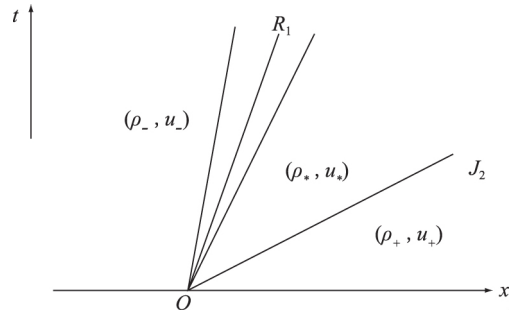


图3 当 $u_+ > u_-$ 时黎曼解的构成

Fig. 3 The composition of the Riemann solution when $u_+ > u_-$

- ferential Equations 2006 31(2): 243 – 275.
- [8] HERTY M ,RASCLE M. Coupling conditions for a class of second-order models for traffic flow [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis 2006 38(2): 595 – 616.
- [9] MOUTARI S ,RASCLE M. A hybrid Lagrangian model based on the Aw-Rascle traffic flow model [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics 2007 68(2): 413 – 436.
- [10] AW A ,KLAR A ,MATERNE A ,et al. Derivation of continuum traffic flow models from microscopic follow-the-leader model [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics 2002 63(1): 259 – 278.
- [11] SHEN C ,SUN M N. Formation of delta shocks and vacuum states in the vanishing pressure limit of Riemann solutions to the perturbed Aw-Rascle model [J]. Journal of Differential Equations 2010 249(12): 3024 – 3051.
- [12] HUANG F M ,WANG Z. Well posedness for pressureless flow [J]. Communications in Mathematics Physics 2001 222(1): 117 – 146.
- [13] SHENG W C ,ZHANG T. The Riemann problem for the transportation equations in gas dynamics [J]. Memoirs of the American Mathematical Society ,1999 ,137: 1 – 11.
- [14] CHEN G Q ,LIU H L. Formation of δ – shocks and vacuum states in the vanishing pressure limit of solutions to the Euler equations for isentropic fluids [J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis 2003 34(4): 925 – 938.
- [15] LI J Q. Note on the compressible Euler equations with zero temperature [J]. Applied Mathematics Letters 2001 ,14(4): 519 – 523.
- [16] MITROVIC D ,NEDELJKOV M. Delta-shock waves as a limit of shock waves [J]. Journal of Hyperbolic Differential Equations 2007 4(4): 629 – 653.
- [17] SHEN C. The limits of Riemann solutions to the isentropic magnetogasdynamics [J]. Applied Mathematics Letters 2011 24(7): 1124 – 1129.

Riemann Problem for the AR Traffic Flow Model Under the Logarithmic Pressure

ZHANG Baoyun , SUN Meina

(School of Mathematics and Statistics Science ,Ludong University ,Yantai 264039 ,China)

Abstract: The Riemann problem for the AR traffic flow model under the logarithmic pressure was considered , and the Riemann solutions in all cases were given. The limit behaviors of Riemann solutions were discussed when the pressure disappeared. In addition ,the formation of delta shock wave and vacuum state was investigated in detail.

Keywords: AR traffic flow model; Riemann problem; delta shock wave; vacuum state

(责任编辑 顾建忠)