鲁东大学学报(自然科学版)
Journal of Ludong University(Natural Science Edition) 2020,36(4):296—304

具有时变时滞的随机非线性系统的输出反馈跟踪控制

由玉瑶,李武全,顾建忠

(鲁东大学 数学与统计科学学院,山东 烟台 264039)

摘要:本文研究了一类具有未知时变时滞的随机非线性系统的输出反馈跟踪控制问题。系统中的扩散项和漂移项不仅依赖于输出,还依赖于不可测量的状态和未知的时变时滞。对于具有时变时滞的随机非线性系统,本文通过引入坐标变换和齐次占优技术,设计一个基于观测器的输出反馈控制器,使得跟踪误差能调节到零的任意小邻域内。仿真结果验证了所提方案的有效性。

关键词:时变时滞;随机非线性系统;输出反馈;跟踪

中图分类号:TP273 文献标志码:A 文章编号:1673-8020(2020)04-0296-09

近年来,随机模型在科学和工业的许多分支中发挥着重要的作用,引起了人们的广泛关注。自随机系统的稳定性理论[1—2]提出以来,现有文献对 Lyapunov 函数的选取主要分为两种:加权二次 Lyapunov 函数[3]和四次 Lyapunov 函数[4],随机系统理论随后得到迅速发展[5—6]。时滞现象普遍存在于工程问题中,它的存在可能会导致系统的性能下降。文献[7]提出了处理时滞问题的工具:Lyapunov-Krasovskii 泛函和 Lyapunov-Razumikhin 泛函,文献[8]研究时滞为固定常数时系统的镇定问题,文献[9]利用齐次占优技术研究时滞系统的镇定问题。以上成果主要研究镇定问题,但在许多需考虑随机干扰的实际问题中,如海上的船舶、振荡的市场经济等,跟踪问题尤为重要。文献[10]研究了无时滞的非线性系统的输出跟踪问题,文献[11—12]分别研究具有时变时滞的随机非线性系统类 SISS 逆动力学和 SISS 逆动力学的跟踪控制问题。需要注意的是,文献[10—12]利用状态反馈解决输出跟踪问题,这要求系统所有状态的信息都可测,但在实际中状态信息并不总是可测的,因此,研究随机非线性系统的输出反馈跟踪控制问题更具有现实意义。文献[13—14]利用输出反馈研究系统在无时滞时的跟踪控制问题。

由以上文献的启发,本文通过高增益齐次占优技术,研究一类具有时变时滞的随机非线性系统的跟踪控制问题,所设计的输出反馈控制器使跟踪误差能够调节到零的任意小邻域内。

本文主要考虑如下一类随机非线性系统:

$$\begin{cases} \mathrm{d}x_i(t) = x_{i+1}(t)\mathrm{d}t + f_i(t,\bar{\boldsymbol{x}}_i(t),\bar{\boldsymbol{x}}_i(t-d(t)))\mathrm{d}t + \boldsymbol{g}_i^{\mathrm{T}}(t,\bar{\boldsymbol{x}}_i(t),\bar{\boldsymbol{x}}_i(t-d(t)))\mathrm{d}\omega, i=1,2,\cdots,n-1, \\ \mathrm{d}x_n(t) = u(t)\mathrm{d}t + f_n(t,\bar{\boldsymbol{x}}_n(t),\bar{\boldsymbol{x}}_n(t-d(t)))\mathrm{d}t + \boldsymbol{g}_n^{\mathrm{T}}(t,\bar{\boldsymbol{x}}_n(t),\bar{\boldsymbol{x}}_n(t-d(t)))\mathrm{d}\omega, \\ y(t) = x_1(t) - y_r(t), \end{cases} \tag{1}$$

其中,$\boldsymbol{x}(t) = \bar{\boldsymbol{x}}_n(t) = (x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^n$,$u(t) \in \mathbf{R}$ 和 $y(t) \in \mathbf{R}$ 分别为系统的状态向量,控制输入和系统输出,$\bar{\boldsymbol{x}}_i(t) = (x_1(t),x_2(t),\cdots,x_i(t))^{\mathrm{T}}$,$\bar{\boldsymbol{x}}_i(t-d(t)) = (x_1(t-d(t)),x_2(t-d(t)),\cdots,x_i(t-d(t)))^{\mathrm{T}}$,$i=1,2,\cdots,n$,$d(t):\mathbf{R}_+ \to [0,d]$ 为时变时滞,$y_r(t)$ 为参考信号;ω 为定义在概率空间(Ω,F,P)上的独立标准 Wiener 过程,其中 Ω 为样本空间,F 和 P 分别为 σ 代数域和概率测度;函数 f_i:$\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^i \times \mathbf{R}^i \to \mathbf{R}$,$g_i$:$\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^i \times \mathbf{R}^i \to \mathbf{R}^m$ 为 C^1 函数,且满足 $f_i(t,0,\cdots,0) = 0$,$g_i(t,0,\cdots,0) = \mathbf{0}$,$i =$

收稿日期:2020-05-25;修回日期:2020-08-05

基金项目:山东省高等学校"青创科技计划"(2019KJN017);山东省高等学校科技计划(J17KA051)

第一作者简介:由玉瑶(1995—),女,山东烟台人,硕士研究生,研究方向为随机控制。E-mail:y17853517609@126.com

通信作者简介:李武全(1981—),男,山东梁山人,教授,硕士研究生导师,博士,研究方向为随机非线性系统的控制与稳定性。E-mail:sea81@126.com

$1,2,\cdots,n$。

1　预备知识

如下记号贯穿本文。$\mathbf{R}_+$ 表示全体非负实数，X^{T} 表示 X 的转置，$\mathrm{Tr}\{X\}$ 表示方阵 X 的迹，$|\cdot|$ 表示欧氏空间中向量的 L_2 范数，C^i 为相应定义域上的 i 阶连续可微函数。对于定义在 $\mathbf{R}^n\times[-d,\infty)$ 上的非负函数 $V(x,t)$，$C^{2,1}(\mathbf{R}^n\times[-d,\infty);\mathbf{R}_+)$ 表示关于分量 x 是 C^2 的且关于分量 t 是 C^1 的函数集合。K: $\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+$ 表示连续、严格单调且零点等于零的函数全体，K_∞ 表示 K 中的无界函数集。

考虑如下随机微分方程：

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-d(t)))\mathrm{d}t+\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-d(t)))\mathrm{d}w,\ \forall t\geqslant 0,\tag{2}$$

其中，初始值为 $\{x(\theta):-d\leqslant\theta\leqslant 0\}=\xi\in C^b_{F_0}([-d,0];\mathbf{R}^n)$，$d(t):\mathbf{R}_+\to[0,d]$ 是 Borel 可测函数，ω 为独立标准 Wiener 过程，$\boldsymbol{f}$: $\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 和 $\boldsymbol{g}$: $\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^{m\times n}$ 满足局部 Lipschitz 条件，且 $\boldsymbol{f}(0,0,t)\equiv\mathbf{0}$，$\boldsymbol{g}(0,0,t)\equiv\mathbf{0}$。

定义 1[11]　随机系统(2)中任意一个 C^2 函数 $V(\boldsymbol{x}(t),t)$，其微分算子定义为：

$$LV=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\boldsymbol{g}\frac{\partial^2 V}{\partial \boldsymbol{x}^2}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\right\}。$$

引理 1[15]　对于系统(2)，若存在函数 $V(\boldsymbol{x}(t),t)\in C^{2,1}(\mathbf{R}^n\times[-d,\infty);\mathbf{R}_+)$，$K_\infty$ 函数 α_1 和 α_2，常数 $c_{01}>0$ 和 $c_{02}\geqslant 0$，以及非负函数 $W(\boldsymbol{x}(t),t)$，使得：

$$\alpha_1(|\boldsymbol{x}|)\leqslant V(\boldsymbol{x}(t),t)\leqslant\alpha_2(\sup_{-d\leqslant s\leqslant 0}|\boldsymbol{x}(t+s)|),\ LV(\boldsymbol{x}(t),t)\leqslant -c_{01}W(\boldsymbol{x}(t),t)+c_{02},$$

则系统(2)在 $[-d,\infty)$ 存在唯一解；当 $W(\boldsymbol{x}(t),t)\geqslant cV(\boldsymbol{x}(t),t)$ 时，系统的解是依概率有界的。

引理 2[4]　函数 $V(\boldsymbol{x}(t),t)\in C^{2,1}(\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}_+;\mathbf{R}_+)$，$\tau_1,\tau_2$ 为有界的停止时间，且 $0\leqslant\tau_1\leqslant\tau_2$，若 $V(\boldsymbol{x}(t),t)$ 和 $LV(\boldsymbol{x}(t),t)$ 在 $t\in[\tau_1,\tau_2]$ 有界，则

$$E[V(\boldsymbol{x}(t),\tau_2)-V(\boldsymbol{x}(t),\tau_1)]=E\int_{\tau_1}^{\tau_2}LV(\boldsymbol{x}(t),t)\mathrm{d}t。$$

引理 3[4]　对任意的向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，有如下不等式成立：

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}\leqslant\frac{v^p}{p}|\boldsymbol{x}|^p+\frac{1}{qv^q}|\boldsymbol{y}|^q,$$

其中，常数 $v>0$，$p>1$，$q>1$，且 $(p-1)(q-1)=1$。

假设 1　对于 $i=1,2,\cdots,n$，存在常数 $a_1>0$ 和 $a_2>0$，使得下式成立：

$$|f_i(t,\bar{\boldsymbol{x}}_i(t),\bar{\boldsymbol{x}}_i(t-d(t)))|\leqslant a_1\left(\sum_{k=1}^{i}|x_k(t)|+\sum_{k=1}^{i}|x_k(t-d(t))|\right),$$

$$|\boldsymbol{g}_i(t,\bar{\boldsymbol{x}}_i(t),\bar{\boldsymbol{x}}_i(t-d(t)))|\leqslant a_2\left(\sum_{k=1}^{i}|x_k(t)|+\sum_{k=1}^{i}|x_k(t-d(t))|\right)。$$

假设 2　存在常数 $\gamma<1$，使得时变时滞 $d(t)$ 满足：$\dot{d}(t)\leqslant\gamma<1$。

假设 3　参考信号 $y_r(t)$ 是连续可微的，且存在已知常数 $M>0$，使得对任意 $t\in[0,+\infty)$，有 $|y_r(t)|+|\dot{y}_r(t)|\leqslant M$。

2　控制器设计

2.1　标称系统的分析

系统(1)的标称系统为：

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}z_i(t) = z_{i+1}(t)\,\mathrm{d}t, i = 1,2,\cdots,n-1, \\
\mathrm{d}z_n(t) = v(t)\,\mathrm{d}t, \\
y(t) = z_1(t)。
\end{cases} \tag{3}
$$

针对系统(3)设计如下观测器:

$$\dot{\eta}_k = -l_{k-1}\hat{z}_k, \hat{z}_k = \eta_k + l_{k-1}\hat{z}_{k-1}, k = 2,3,\cdots,n,$$

和输出反馈控制器:

$$v(\hat{z}) = -\alpha_n(\hat{z}_n + \alpha_{n-1}\hat{z}_{n-1} + \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\hat{z}_{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\cdots\alpha_1 z_1),$$

其中,$\hat{z}_1 = z_1, \hat{z} = (z_1, \hat{z}_2, \cdots, \hat{z}_n)^{\mathrm{T}}$;$l_s$ 是增益,$s = 1,2,\cdots,n-1$;$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为常数。

定义 $\boldsymbol{Z} = (z_1, \cdots, z_n, \eta_2, \cdots, \eta_n)^{\mathrm{T}}$,则

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Z} = E(\boldsymbol{Z})\,\mathrm{d}t = (z_2, \cdots, z_n, v(\hat{z}), f_{n+1}, \cdots, f_{2n+1})^{\mathrm{T}}\mathrm{d}t, \tag{4}$$

其中,$f_i = -l_{i-n}\hat{z}_{i-n+1}, i = n+1, n+2, \cdots, 2n-1$。

2.2 输出反馈控制器设计

首先,定义

$$e_1 = y, e_i = x_i, i = 2,3,\cdots,n, \tag{5}$$

则系统(1)可以表示为:

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}e_1(t) = e_2(t)\,\mathrm{d}t + \breve{f}_1(\cdot)\,\mathrm{d}t + \breve{\boldsymbol{g}}_1^{\mathrm{T}}(\cdot)\,\mathrm{d}w, \\
\mathrm{d}e_2(t) = e_3(t)\,\mathrm{d}t + \breve{f}_2(\cdot)\,\mathrm{d}t + \breve{\boldsymbol{g}}_2^{\mathrm{T}}(\cdot)\,\mathrm{d}w, \\
\quad\vdots \\
\mathrm{d}e_n(t) = u(t)\,\mathrm{d}t + \breve{f}_n(\cdot)\,\mathrm{d}t + \breve{\boldsymbol{g}}_n^{\mathrm{T}}(\cdot)\,\mathrm{d}w, \\
y(t) = e_1(t),
\end{cases} \tag{6}
$$

其中,$\breve{f}_1(\cdot) = f_1(\cdot) - \dot{y}_r(t), \breve{\boldsymbol{g}}_1(\cdot) = \boldsymbol{g}_1(\cdot), \breve{f}_i(\cdot) = f_i(\cdot), \breve{\boldsymbol{g}}_i(\cdot) = \boldsymbol{g}_i(\cdot), i = 2,3,\cdots,n$。

由假设1和3知,存在常数 $c_1 > 0$ 和 $c_2 > 0$,使得

$$
\begin{aligned}
|\breve{f}_i(\cdot)| &\leqslant a_1\Big(\sum_{k=1}^{i}|e_k(t)| + \sum_{k=1}^{i}|e_k(t-d(t))|\Big) + c_1, \\
|\breve{\boldsymbol{g}}_i(\cdot)| &\leqslant a_2\Big(\sum_{k=1}^{i}|e_k(t)| + \sum_{k=1}^{i}|e_k(t-d(t))|\Big) + c_2,
\end{aligned} \tag{7}
$$

其中,$c_1 = 2a_1M + M, c_2 = 2a_2M$。

其次,引入如下坐标变换:

$$z_i = \frac{e_i}{L_1^{i-1}},\ v = \frac{u}{L_1^n},\ i = 1,2,\cdots,n, \tag{8}$$

其中,$L_1 > 1$ 是待设计的参数,则系统(6)可以表示为:

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}z_i(t) = \Big(L_1 z_{i+1}(t) + \dfrac{\breve{f}_i(\cdot)}{L_1^{i-1}}\Big)\mathrm{d}t + \dfrac{\breve{\boldsymbol{g}}_i^{\mathrm{T}}(\cdot)}{L_1^{i-1}}\mathrm{d}w,\ i = 1,2,\cdots,n-1, \\
\mathrm{d}z_n(t) = \Big(L_1 v(t) + \dfrac{\breve{f}_n(\cdot)}{L_1^{n-1}}\Big)\mathrm{d}t + \dfrac{\breve{\boldsymbol{g}}_n^{\mathrm{T}}(\cdot)}{L_1^{n-1}}\mathrm{d}w, \\
y(t) = z_1(t)。
\end{cases} \tag{9}
$$

针对系统(9)设计如下观测器:

$$\dot{\eta}_k = -l_{k-1}\hat{z}_k,\ \hat{z}_k = \eta_k + l_{k-1}\hat{z}_{k-1},\ k = 2,3,\cdots,n, \tag{10}$$

及输出反馈控制器:

$$v(\hat{z}) = -\alpha_n(\hat{z}_n + \alpha_{n-1}\hat{z}_{n-1} + \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\hat{z}_{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\cdots\alpha_1 z_1), \tag{11}$$

那么,闭环系统(9)~(11)可写为:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{Z}=L_1E(\boldsymbol{Z})+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Z})\mathrm{d}t+\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z})\mathrm{d}w, \tag{12}$$

其中

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Z})=\left(\breve{f}_1(\cdot),\frac{\breve{f}_2(\cdot)}{L_1},\cdots,\frac{\breve{f}_n(\cdot)}{L_1^{n-1}},0,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{G}(\boldsymbol{Z})=\left(\breve{\boldsymbol{g}}_1(\cdot),\frac{\breve{\boldsymbol{g}}_2(\cdot)}{L_1},\cdots,\frac{\breve{\boldsymbol{g}}_n(\cdot)}{L_1^{n-1}},0,\cdots,0\right)^{\mathrm{T}}。 \tag{13}$$

2.3 Lyapunov 函数的选取及稳定性分析

对系统(12),选取如下形式的 Lyapunov 函数

$$V(z_1,\cdots,z_n,\eta_2,\cdots,\eta_n)=V_n(z_1,\cdots,z_n)+U(\eta_2,\cdots,\eta_n), \tag{14}$$

其中

$$V_n(z_1,\cdots,z_n)=\sum_{i=1}^{n}\int_{z_i^*}^{z_i}(s-z_n^*)^3\mathrm{d}s,\ U(\eta_2,\cdots,\eta_n)=\sum_{i=2}^{n}\int_{\gamma_i^3}^{z_i^3}(s^{1/3}-\gamma_i)\mathrm{d}s,$$

且 $z_i^*=-\xi_{i-1}\alpha_{i-1}$,$\xi_i=z_i-z_i^*$,$\gamma_i=\eta_i+l_{i-1}z_{i-1}$。

引理4[8] 对系统(4),选取式(14)中的 Lyapunov 函数 $V(Z)$,则 $V(Z)$ 具有以下性质:

(i) $V(Z)$ 是正定的,引入权重 $\Delta=(\underbrace{1,\cdots,1}_{z_1,\cdots,z_n},\underbrace{1,\cdots,1}_{\eta_2,\cdots,\eta_n})$,则 $V(Z)$ 是4阶齐次的。

(ii) $\dfrac{\partial V}{\partial \boldsymbol{Z}}E(\boldsymbol{Z})\leqslant -c_0\|\boldsymbol{Z}\|_\Delta^4$,其中 $\|\boldsymbol{Z}\|_\Delta=\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2+\sum_{j=2}^{n}|\eta_j|^2\right)^{1/2}$。

引理5 若假设1~3成立,则以下结论成立:

$$\frac{\partial V(\boldsymbol{Z}(t))}{\partial \boldsymbol{Z}(t)}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Z})\leqslant\tilde{\rho}_1\|\boldsymbol{Z}(t)\|_\Delta^4+\bar{\rho}_1\|\boldsymbol{Z}(t-d(t))\|_\Delta^4+\beta_1,$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Z})\frac{\partial^2V(\boldsymbol{Z}(t))}{\partial \boldsymbol{Z}^2(t)}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z})\right\}\leqslant\tilde{\rho}_2\|\boldsymbol{Z}(t)\|_\Delta^4+\bar{\rho}_2\|\boldsymbol{Z}(t-d(t))\|_\Delta^4+\beta_2, \tag{15}$$

其中 $\tilde{\rho}_i>0$,$\bar{\rho}_i>0$,$\beta_i>0$,$i=1,2$。

证明 首先估计梯度项。由文献[13]中的引理2.2,式(7)和 $L_1>1$,得

$$\left|\frac{\breve{f}_i(\cdot)}{L_1^{i-1}}\right|\leqslant\bar{a}_1(\|\boldsymbol{Z}(t)\|_\Delta+\|\boldsymbol{Z}(t-d(t))\|_\Delta)+c_1L_1^{-i+1}, \tag{16}$$

其中,常数 $\bar{a}_1>0$。由引理4,$\dfrac{\partial V(\boldsymbol{Z}(t))}{\partial Z_i(t)}$ 是3阶齐次的,结合式(16),得

$$\left|\frac{\partial V(\boldsymbol{Z}(t))}{\partial \boldsymbol{Z}(t)}F(\boldsymbol{Z})\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial V(\boldsymbol{Z}(t))}{\partial Z_i(t)}\right|\left|\frac{\breve{f}_i(\cdot)}{L_1^{i-1}}\right|\leqslant$$

$$c_0n(\|\boldsymbol{Z}(t)\|_\Delta^4+\|\boldsymbol{Z}(t-d(t))\|_\Delta^4)+c_1\sum_{i=1}^{n}L_1^{-i+1}\left|\frac{\partial V(\boldsymbol{Z}(t))}{\partial Z_i(t)}\right|, \tag{17}$$

其中 $c_0>0$ 和 $c_1>0$ 均为常数。由引理3和4,得

$$c_1\sum_{i=1}^{n}L_1^{-i+1}\left|\frac{\partial V(\boldsymbol{Z}(t))}{\partial Z_i(t)}\right|\leqslant n\|\boldsymbol{Z}(t)\|_\Delta^4+\frac{27}{256}\tilde{c}_1^4\sum_{i=1}^{n}L_1^{-4(i-1)}。 \tag{18}$$

将式(18)代入式(17),得

$$\left|\frac{\partial V(\boldsymbol{Z}(t))}{\partial \boldsymbol{Z}(t)}F(\boldsymbol{Z})\right|\leqslant\tilde{\rho}_1\|\boldsymbol{Z}(t)\|_\Delta^4+\bar{\rho}_1\|\boldsymbol{Z}(t-d(t))\|_\Delta^4+\beta_1, \tag{19}$$

其中,$\beta_1=\dfrac{27}{256}\tilde{c}_1^4\sum_{i=1}^{n}L_1^{-4(i-1)}$。

下面估计 Hessian 项:

$$\left|\frac{\breve{g}_i(\cdot)}{L_1^{i-1}}\right| \leqslant \bar{a}_2(\|Z(t)\|_\Delta + \|Z(t-d(t))\|_\Delta) + c_2 L_1^{-i+1}, \tag{20}$$

其中,$\bar{a}_2 > 0$ 为常数。由 $G(Z)$ 的定义及式(20),得

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{G(Z)\frac{\partial^2 V(Z(t))}{\partial Z^2(t)}G^{\mathrm{T}}(Z)\right\} \leqslant \frac{1}{2}r\left|G(Z)\frac{\partial^2 V(Z(t))}{\partial Z^2(t)}G^{\mathrm{T}}(Z)\right|_\infty \leqslant$$
$$\frac{1}{2}r\sqrt{r}\left|G(Z)\frac{\partial^2 V(Z(t))}{\partial Z^2(t)}G^{\mathrm{T}}(Z)\right| \leqslant \frac{1}{2}r\sqrt{r}\sum_{i,j=1}^{2n-1}\left|G(Z)\frac{\partial^2 V(Z(t))}{\partial Z_i(t)\partial Z_j(t)}G^{\mathrm{T}}(Z)\right| \leqslant$$
$$\delta_1\sum_{i,j=1}^{n}(\|Z(t)\|_\Delta^4 + \|Z(t-d(t))\|_\Delta^4) + \delta_2\sum_{i,j=1}^{n}L_1^{-i+1}(\|Z(t)\|_\Delta^3 + \|Z(t-d(t))\|_\Delta^3) +$$
$$\delta_3\sum_{i,j=1}^{n}L_1^{-j+1}(\|Z(t)\|_\Delta^3 + \|Z(t-d(t))\|_\Delta^3) + \delta_4\sum_{i,j=1}^{n}L_1^{-i-j+2}\|Z(t)\|_\Delta^2, \tag{21}$$

其中,常数 $\delta_i > 0, i = 1,2,3,4$。根据引理3,进一步得

$$\delta_2 L_1^{-i+1}(\|Z(t)\|_\Delta^3 + \|Z(t-d(t))\|_\Delta^3) \leqslant (\|Z(t)\|_\Delta^4 + \|Z(t-d(t))\|_\Delta^4) + \frac{54}{256}\delta_2^4 L_1^{-4(i+1)},$$
$$\delta_3 L_1^{-j+1}(\|Z(t)\|_\Delta^3 + \|Z(t-d(t))\|_\Delta^3) \leqslant (\|Z(t)\|_\Delta^4 + \|Z(t-d(t))\|_\Delta^4) + \frac{54}{256}\delta_3^4 L_1^{-4(j+1)},$$
$$\delta_4 L_1^{-i-j+2}\|Z(t)\|_\Delta^2 \leqslant \|Z(t)\|_\Delta^4 + \frac{1}{4}\delta_4^2 L_1^{-2(i+j-2)}。 \tag{22}$$

将式(22)代入式(21)中,可以得到

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{G(Z)\frac{\partial^2 V(Z(t))}{\partial Z^2(t)}G^{\mathrm{T}}(Z)\right\} \leqslant$$
$$(\delta_1+3)n^2\|Z(t)\|_\Delta^4 + (\delta_1+2)n^2\|Z(t-d(t))\|_\Delta^4 + \frac{54}{256}(\delta_2^4+\delta_3^4)n\sum_{i=1}^{n}L_1^{-4(i-1)} + \frac{1}{4}\delta_4^2\sum_{i,j=1}^{n}L_1^{-2(i+j-2)} \leqslant$$
$$\tilde{\rho}_2\|Z(t)\|_\Delta^4 + \bar{\rho}_2\|Z(t-d(t))\|_\Delta^4 + \beta_2,$$

其中,$\beta_2 = \frac{54}{256}(\delta_2^4+\delta_3^4)n\sum_{i=1}^{n}L_1^{-4(i-1)} + \frac{1}{4}\delta_4^2\sum_{i,j=1}^{n}L_1^{-2(i+j-2)}$。

基于引理4和5,给出本文主要结果如下:

定理1 系统(1)在假设1~3成立的条件下,通过坐标变换(5)和(8),设计观测器(10)和输出反馈控制器(11),则可以保证下面结论成立:

(i) 闭环系统在 $[-d,\infty)$ 上几乎处处有唯一解;

(ii) 闭环系统的状态是依概率有界的;

(iii) 通过选取适当参数,可以使跟踪误差调节到任意小。

证明 下面分三步证明定理1。

第一步: 证明闭环系统满足局部 Lipschitz 条件。

由 $\frac{\partial v(\hat{z})}{\partial \hat{z}_i} = -\alpha_n\alpha_{n-1}\cdots\alpha_i$ 知,$v(\hat{z})$ 是 C^1 函数,又因为 f_i,g_i 满足局部 Lipschitz 条件,故闭环系统(1)和(9)~(13)满足局部 Lipschitz 条件。

第二步: 构造 Lyapunov–Krasovskii 函数:

$$T(Z(t)) = V(Z(t)) + \frac{\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_2}{(1-\gamma)e^{-d}}\int_{t-d(t)}^{t} e^{\sigma-t}\|Z(\sigma)\|_\Delta^4 d\sigma。 \tag{23}$$

易证,$T(Z(t))$ 是关于 $Z(t)$ 的 C^2 函数。由于 $T(Z(t))$ 连续、正定且无界,由文献[15]的引理4.3知,存在 K_∞ 函数 β_1 和 α_{21},使

$$\beta_1(|Z(t)|) \leqslant V(Z(t)) \leqslant \alpha_{21}(|Z(t)|)。 \tag{24}$$

同理,由文献[13]的引理2.2和文献[15]的引理4.3知,存在常数 $\bar{c} > 0$ 和 K_∞ 函数 $\bar{\alpha}_{22}$,使得

$$\bar{c}\|Z(t)\|_\Delta^4 \leqslant \bar{\alpha}_{22}(|Z(t)|)。 \tag{25}$$

由 $d(t):\mathbf{R}_+\to[0,d]$ 和式(25)，得

$$\frac{\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_2}{(1-\gamma)\mathrm{e}^{-d}}\int_{t-d(t)}^{t}\mathrm{e}^{\sigma-t}\|\boldsymbol{Z}(\sigma)\|_{\Delta}^{4}\mathrm{d}\sigma\leqslant\tilde{c}\int_{t-d(t)}^{t}\bar{\alpha}_{22}\|\boldsymbol{Z}(\sigma)\|_{\Delta}^{4}\mathrm{d}\sigma\leqslant$$

$$\tilde{c}\int_{-d}^{0}\bar{\alpha}_{22}\|\boldsymbol{Z}(s+t)\|_{\Delta}^{4}\mathrm{d}(s+t)\leqslant c(\sup_{-d\leqslant s\leqslant 0}\bar{\alpha}_{22}|\boldsymbol{Z}(s+t)|)\leqslant\alpha_{22}(\sup_{-d\leqslant s\leqslant 0}|\boldsymbol{Z}(s+t)|),\tag{26}$$

其中，$\tilde{c}>0$ 和 $c>0$ 为常数，α_{22} 是 K_∞ 函数。

由于

$$|\boldsymbol{Z}(t)|\leqslant\sup_{-d\leqslant s\leqslant 0}(|\boldsymbol{Z}(s+t)|),\alpha_{21}(|\boldsymbol{Z}(t)|)\leqslant\alpha_{21}(\sup_{-d\leqslant s\leqslant 0}(|\boldsymbol{Z}(s+t)|)),$$

令 $\beta_2=\alpha_{21}+\alpha_{22}$，通过式(23)~(25)，得

$$\beta_1(|\boldsymbol{Z}(t)|)\leqslant T(\boldsymbol{Z}(t))\leqslant\beta_2(\sup_{-d\leqslant s\leqslant 0}(|\boldsymbol{Z}(s+t)|))。\tag{27}$$

令 $Y(\boldsymbol{Z}(t))=\dfrac{\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_2}{1-\gamma}\displaystyle\int_{t-d(t)}^{t}\mathrm{e}^{\sigma-t}\|\boldsymbol{Z}(\sigma)\|_{\Delta}^{4}\mathrm{d}\sigma$，由定义 1，引理 4 和 5，得

$$\begin{aligned}LT(\boldsymbol{Z}(t))\leqslant&\frac{\partial V(\boldsymbol{Z}(t))}{\partial\boldsymbol{Z}(t)}L_1E(\boldsymbol{Z})+\frac{\partial V(\boldsymbol{Z}(t))}{\partial\boldsymbol{Z}(t)}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{Z})+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left\{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{Z})\frac{\partial^2V(\boldsymbol{Z}(t))}{\partial\boldsymbol{Z}^2(t)}\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Z})\right\}+\\&\frac{\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_2}{(1-\gamma)\mathrm{e}^{-d}}\|\boldsymbol{Z}(t)\|_{\Delta}^{4}-(\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_2)\|\boldsymbol{Z}(t-d(t))\|_{\Delta}^{4}-Y(\boldsymbol{Z}(t))\leqslant\\&(-\underline{c}_0L_1+\tilde{\rho}_1+\tilde{\rho}_2+\frac{\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_2}{(1-\gamma)\mathrm{e}^{-d}})\|\boldsymbol{Z}(t)\|_{\Delta}^{4}-Y(\boldsymbol{Z}(t))+\beta_1+\beta_2\leqslant\\&-L_1(\underline{c}_0-(\tilde{\rho}_1+\tilde{\rho}_2+\frac{\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_2}{(1-\gamma)\mathrm{e}^{-d}})L_1^{-1})\|\boldsymbol{Z}(t)\|_{\Delta}^{4}-Y(\boldsymbol{Z}(t))+\beta_1+\beta_2,\end{aligned}\tag{28}$$

其中 $\underline{c}_0$ 独立于 $\tilde{\rho}_i$ 和 $\bar{\rho}_i$，$i=1,2$。选取 $L_1\geqslant\max\left\{\dfrac{\tilde{\rho}_1+\tilde{\rho}_2+\dfrac{\bar{\rho}_1+\bar{\rho}_2}{(1-\gamma)\mathrm{e}^{-d}}}{\underline{c}_0},1\right\}$，代入式(28)，可得

$$LT(\boldsymbol{Z}(t))\leqslant-\bar{c}_0\|\boldsymbol{Z}(t)\|_{\Delta}^{4}-Y(\boldsymbol{Z}(t))+\beta_1+\beta_2,\tag{29}$$

其中，常数 $\bar{c}_0>0$。由文献[13]的引理 2.2 知，存在常数 $\beta_3>0$ 和 $\beta_4>0$，使得

$$\beta_3\|\boldsymbol{Z}(t)\|_{\Delta}^{4}\leqslant V(\boldsymbol{Z}(t))\leqslant\beta_4\|\boldsymbol{Z}(t)\|_{\Delta}^{4}。\tag{30}$$

将式(30)代入式(29)，得

$$LT(\boldsymbol{Z}(t))\leqslant-\frac{\bar{c}_0}{\beta_4}V(\boldsymbol{Z}(t))-Y(\boldsymbol{Z}(t))+\beta_1+\beta_2\leqslant-\hat{c}T(\boldsymbol{Z}(t))+c_{02},\tag{31}$$

其中，$\hat{c}=\min(\dfrac{\bar{c}_0}{\beta_4},1)$，$c_{02}=\beta_1+\beta_2$。

由式(31)和引理 1 可知，闭环系统(12)~(13)在 $[-d,\infty)$ 上几乎处处有唯一解，且所有状态是依概率有界的，结论(i)、(ii)成立。

第三步：证明跟踪误差可调节到任意小。定义 $\eta_l=\inf\{t:t\geqslant t_0,|Z(t)|\geqslant l\}$，$\forall l>0$。对任意的 $t\geqslant t_0$，有 $t_l=\min\{\eta_l,t\}$。由于 $|Z(t)|$ 在 $[t_0,t_l]$ 上几乎处处有界，由式(31)知，$LT(Z(t))$ 在 $[t_0,t_l]$ 上几乎处处有界。因此，由引理 2，得

$$E(\mathrm{e}^{\hat{c}t_l}T(\boldsymbol{Z}(t_l)))\leqslant E\int_{t_0}^{t_l}LT(\boldsymbol{Z}(s))\mathrm{e}^{\hat{c}s}\mathrm{d}s+\hat{c}E\int_{t_0}^{t_l}\mathrm{e}^{\hat{c}s}T(\boldsymbol{Z}(s))\mathrm{d}s+\mathrm{e}^{\hat{c}t_0}ET(\boldsymbol{Z}(t_0))。$$

由于 $\lim\limits_{l\to\infty}\eta_l=\infty$，则当 $l\to\infty$ 时，有

$$\mathrm{e}^{\hat{c}t}ET(\boldsymbol{Z}(t))\leqslant E\int_{t_0}^{t}LT(\boldsymbol{Z}(s))\mathrm{e}^{\hat{c}s}\mathrm{d}s+\hat{c}E\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{\hat{c}s}T(\boldsymbol{Z}(s))\mathrm{d}s+\mathrm{e}^{\hat{c}t_0}ET(\boldsymbol{Z}(t_0)),$$

所以

$$ET(\boldsymbol{Z}(t))\leqslant\mathrm{e}^{-\hat{c}(t-t_0)}ET(\boldsymbol{Z}(t_0))+\frac{c_{02}}{\hat{c}}(1-\mathrm{e}^{-\hat{c}(t-t_0)}),\tag{32}$$

这里，$c_{02}=\frac{27}{256}\tilde{c}_1^4\sum_{i=1}^{n}L_1^{-4(i-1)}+\frac{54}{256}(\delta_2^4+\delta_3^4)n\sum_{i=1}^{n}L_1^{-4(i-1)}+\frac{1}{4}\delta_4^2\sum_{i,j=1}^{n}L_1^{-2(i+j-2)}$。当 L_1 充分大时，c_{02} 可调节到任意小，由式(32)知，$ET(Z(t))$ 可调节到任意小。由于 $Z=(x_1-y_r,z_2,\cdots,z_n,\eta_2,\cdots,\eta_n)^{\mathrm{T}}$，因此，对任意的 $\varepsilon>0$，存在充分大的常数 L，使

$$\lim_{t\to\infty}E(|x_1-y_r|)\leqslant\varepsilon。$$

结论(iii)成立。证毕。

3 仿真实例

本节给出以下实例来验证设计方法的有效性。考虑如下系统:

$$\begin{cases}\mathrm{d}x_1(t)=x_2(t)\mathrm{d}t+x_1(t-d(t))\mathrm{d}t,\\ \mathrm{d}x_2(t)=u(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}x_2(t-d(t))\mathrm{d}w,\\ y(t)=x_1(t)-\sin t,\end{cases}\tag{33}$$

在系统(33)中，取 $a_1=1,a_2=\frac{1}{2},d(t)=\frac{1}{4}(1+\sin t)$，则

$$|f_1|\leqslant(|x_1(t)|+|x_1(t-d(t))|),\ |g_2|\leqslant\frac{1}{2}(|x_1(t)|+|x_1(t-d(t))|),$$

且 $\dot{d}(t)=\frac{1}{4}\cos t<1$。显然，系统(33)满足假设1，且时滞 $d(t)$ 满足假设2。

给出坐标变换

$$z_1=y,\ z_2=\frac{x_2}{L_1},\ v=\frac{u}{L_1^2},$$

式中 $L_1>1$ 是待设计的参数。通过上述设计过程，观测器和控制器取为

$$\begin{cases}\dot{\eta}_2=-L_1l_1\hat{z}_2,\\ \hat{z}_2=\eta_2+l_1(x_1-\sin t),\\ u=-\alpha_2L_1^2(\hat{z}_2+\alpha_1z_1)。\end{cases}$$

仿真过程中，选取 $L_1=84,l_1=2,\alpha_1=2,\alpha_2=20$，初值 $x_1(0)=-0.01,x_2(0)=-2,\eta_2(0)=1$。利用 Matlab 下的 LMI 工具箱，可得图 1~3 所示的响应曲线，仿真结果验证了设计方案的有效性。

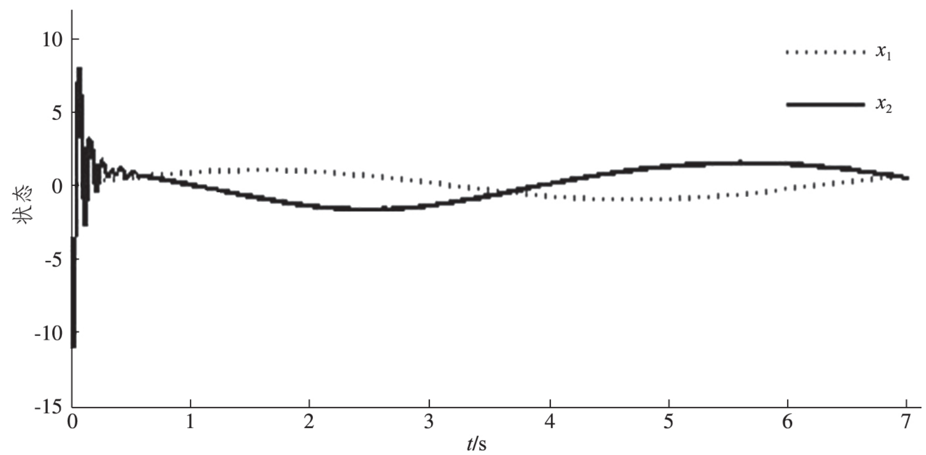

图 1 系统状态响应曲线

Fig. 1 The response of system states

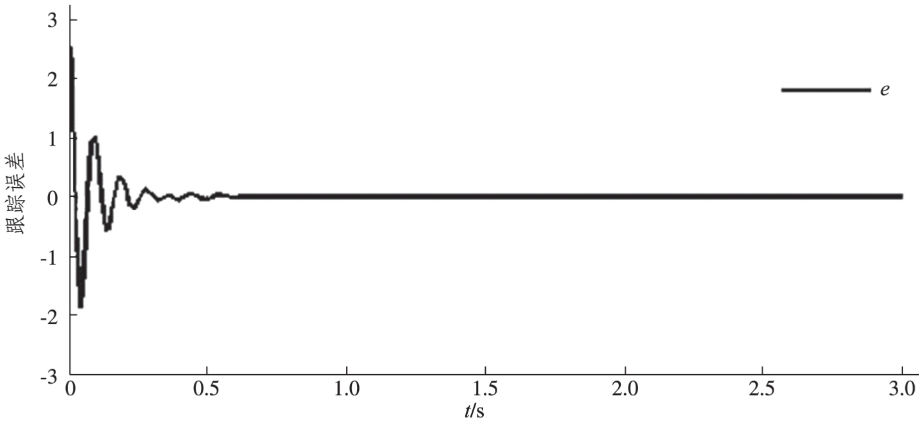

图 2　跟踪误差响应曲线

Fig. 2 The response of tracking error

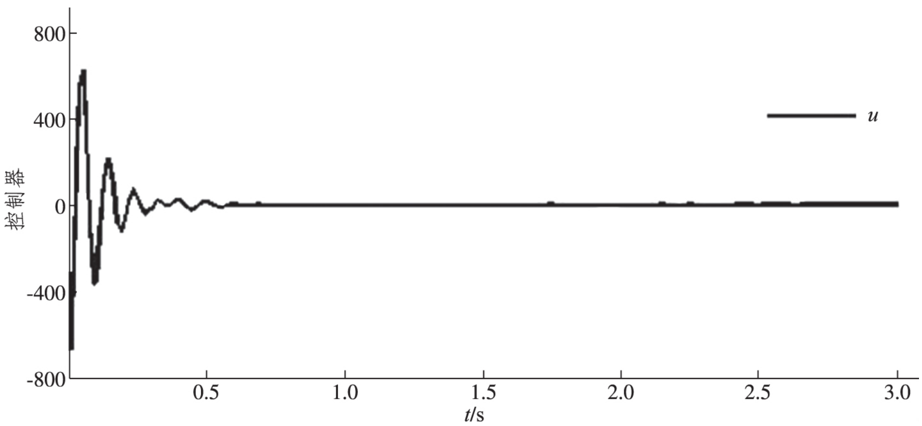

图 3　控制器响应曲线

Fig. 3 The response of control input

4　结语

本文通过随机高增益齐次占优的设计方法，研究了一类具有时变时滞的随机非线性系统的输出反馈跟踪问题。通过设计输出反馈控制器，保证闭环系统的所有状态是依概率有界的，同时跟踪误差能够调节到零的任意小邻域。如何将本文的设计方法推广至高阶系统，将是今后的研究工作。

参考文献:

[1] KUSHNER H J. Stochastic stability and control [M]. New York: Academic Press, 1967.

[2] MAO X R. Stochastic differential equations and applications [M]. Horwood: Chichester, 1997.

[3] PAN Z G, BASAR T. Backstepping controller design for nonlinear stochastic systems under a risk-sensitive cost criterion [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1999, 37(3): 957 – 995.

[4] KRSTIC M, DENG H. Stabilization of uncertain nonlinear systems [M]. NewYork: Springer, 1998.

[5] 李武全，井元伟，张嗣瀛，等. 一类随机非线性系统的输出反馈镇定 [J]. 控制与决策, 2011, 32(2): 153 – 161.

[6] LI W Q, XIE X J, ZHANG S Y. Output-feedback stabilization of stochastic high-order nonlinear systems under weaker conditions [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2011, 49(3): 1262 – 1282.

[7] GU K Q, KARITONOV V L, CHEN J. Stability of time-delay systems [M]. Boston: Birkhauser, 2003.

[8] CHEN W S, WU J, JIAO L C. State-feedback stabilization for a class of stochastic time-delay nonlinear systems [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2012, 22(17): 1921 – 1937.

[9] XIE X J, LIU L. A homogeneous domination approach to state feedback of stochastic high-order nonlinear systems with time-varying delay [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 58(2): 494 – 499.

[10] XIE X J,DUAN N. Output tracking of high-order stochastic nonlinear systems with application to benchmark mechanical system [J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2010,55(5):1197-1202.

[11] XUE L R,ZHANG W H,XIE X J. Global practical tracking for stochastic time-delay nonlinear systems with SISS-like inverse dynamics [J]. Science China Information Sciences,2017,60(12):1-15.

[12] XUE L R,ZHANG W H,LIN Y N. Global output tracking control for high-order stochastic nonlinear systems with SISS inverse dynamics and time-varying delays [J]. Journal of the Franklin Institute,2016,353(13):3249-3270.

[13] LI W Q,WANG H. Output-feedback tracking of stochastic nonlinear systems using homogeneous domination approach [C]//36th Chinese Control Conference,2017:1817-1821.

[14] LI W Q,LU L,FENG G. Output tracking of stochastic nonlinear systems with unstable linearization [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control,2018,28(2):466-477.

[15] LIU S J,GE S Z,ZHANG J F. Adaptive output feedback control for a class of uncertain stochastic nonlinear systems with time delays [J]. International Journal of Control,2008,81(8):1210-1220.

[16] KHALIL H K. Nonlinear systems [M]. Beijing: Publishing House of Electronics Industry,2007.

Output-feedback Tracking Control for Stochastic Nonlinear Systems with Time-varying Delays

YOU Yuyao, LI Wuquan, GU Jianzhong

(School of Mathematics and Statistic Science,Ludong University,Yantai 264039,China)

Abstract: The output-feedback tracking control problem for a class of stochastic nonlinear systems with unknown time-varying delays was studied in this paper. The drift terms and diffusion terms depend not only on the output signal,but also on the unmeasurable states and unknown time-varying delays. For the stochastic nonlinear system with time-varying delays,by introducing coordinate transformation and homogeneous domination technique,an observer-based output-feedback controller was designed so that the tracking error could be adjusted to any arbitrarily small neighborhood of zero. The effectiveness of the proposed scheme was demonstrated by the simulation.

Keywords: time-varying delay; stochastic nonlinear systems; output-feedback; tracking

(责任编辑 顾建忠)