一维吸引相互作用下 p 波费米气体的赝势研究

郝舣航,王美山

(鲁东大学 物理与光电工程学院,山东 烟台 264039)

摘要:通过对零程相互作用下一维 p 波费米气体中两粒子间接触条件的分析,建立了忽略有效力程的相互作用边界条件与两粒子接触条件在表达上的等价性。在此基础上将有效力程这一相互作用参数引入模型中,通过引入 δ′函数求得赝势的方法,给出了两种相互作用下的一维 p 波费米气体的赝势形式和一种新的粒子间接触条件。

关键词:一维费米气体;有效力程;赝势;粒子间接触条件

中图分类号:O562.5 **文献标志码**:A **文章编号**:1673-8020(2021)02-0116-05

量子多体物理是当今物理学发展中的重要分支和重要的研究方向,其中一维严格可解模型可以通过 Bethe Ansatz 严格求解,从而利用精确解来解析地研究多体物理[1]。近年来,随着冷原子实验技术的飞速发展,已经能够在实验中实现“准一维”的多体物理系统,且粒子间的相互作用强度能够通过“费希巴赫共振”进行自由调控,这使得许多在一维严格可解模型中曾做出的重要理论预言得到了实验验证[2—4],因此,关于一维严格可解模型的研究正在引起越来越多学者的兴趣与关注[5]。

在一维严格可解模型中,一个典型的例子是一维 δ 相互作用玻色气体模型(Lieb-Liniger 模型)[6—9],该模型在理论与实验上已有大量广泛且深入的研究。通过“费希巴赫共振”调节相互作用,在实验上已能够实现一维玻色气体在强排斥相互作用下的 Tonks-Girardeau 气体[2—3]。根据玻色—费米映射理论[10—11],在这种强排斥相互作用极限下,玻色子的波函数可以映射到自由费米子,这种“玻色—费米”的二元性同样可以由费米子映射到玻色子。在一维无自旋费米气体模型中,费米子的自旋排列全部朝向同一个方向,而由于泡利不相容原理,在低能时粒子间不存在 s 波的相互作用,使得 p 波相互作用占据了主导地位。当散射过程中两粒子间的相互作用范围为零程时,若一维 p 波相互作用的费米气体处于强吸引的相互作用极限,系统中的费米子能够映射到弱相互作用的玻色子,这种极限也被称为 fTG(fermionic Tonks-Girardeau) 极限[12—14]。

若要在实验条件下观测到 fTG 极限,有效力程通常是不可忽略的[15]。目前为止,对于同时包含“散射长度”和“有效力程”两个相互作用参数的一维 p 波相互作用费米气体,已有的研究主要集中在基于严格解基础上对模型的基态能、动量分布和有限温性质的讨论[16—18],而该模型哈密顿量中的赝势形式尚未得到。本文将从费米气体散射过程中的两粒子接触条件出发,得到同时考虑两种相互作用的赝势表达式,并且给出包含两个相互作用参数的一种新的费米子接触条件。

1 理论背景

低能下三维空间中 p 波相互作用的散射相移可以表示为[15]

$$\lambda^3\cot\delta_p(\lambda) = -\frac{1}{w_1} - \alpha_1\lambda^2 + O(\lambda^4), \quad (1)$$

其中 w_1 为三维散射体积,α_1 为三维有效力程,λ 为两个碰撞粒子的相对动量。且一维有效波函数

收稿日期:2021-01-17;修回日期:2021-02-08

基金项目:山东省自然科学基金(ZR2020MA079)

第一作者简介:郝舣航(1994—),男,山东济宁人,硕士研究生,研究方向为原子与分子物理。E-mail: haoyihang2018@163.com

通信作者简介:王美山(1971—),男,山东淄博人,教授,硕士研究生导师,博士,研究方向为原子与分子物理。E-mail: mswang1971@163.com

可以写为[15]

$$\psi_{1D}(z) = e^{i\lambda z} + e^{i\lambda|z|}\left[f^{even} + \mathrm{sgn}(z) f^{odd}\right], \quad (2)$$

其中 f^{even} 和 f^{odd} 分别为偶数波和奇数波的散射振幅。费米子波函数为

$$\psi_F(z) = \frac{\psi_{1D}(z) - \psi_{1D}(-z)}{2}。\quad (3)$$

低能极限下的一维 p 波相互作用费米气体的散射振幅为[15]

$$f_p^{odd} = -i\lambda\left(\frac{1}{l_p} + i\lambda + \xi_p\lambda^2\right)^{-1}, \quad (4)$$

其中 l_p、ξ_p 分别为与三维散射相关的一维散射长度和一维有效力程，

$$l_p = 3a_\perp\left[\frac{a_\perp^3}{w_1} - 3\sqrt{2}\zeta\left(-\frac{1}{2}\right)\right]^{-1}, \quad (5)$$

$$\xi_p = \frac{\alpha_1 a_\perp^2}{3} > 0, \quad (6)$$

式中：横向束缚长度 $a_\perp = \sqrt{\hbar/(m\omega_\perp)}$，$m$ 为粒子质量，$\omega_\perp$ 为束缚频率；$3\sqrt{2}\zeta\left(-\frac{1}{2}\right) \approx -0.88$。

不难看出，当式(3)中系统的波函数 $\psi_F(z)$ 满足边界条件

$$\lim_{z\to0^+}\left(\frac{1}{l_p} + \partial_z - \xi_p\partial_z^2\right)\psi_F(z) = 0 \quad (7)$$

时可以得到上述散射振幅的表达式(4)。

在相互作用边界条件(7)的基础上，考虑由两个粒子组成的一维 p 波费米气体，由于费米子的波函数 ψ_F 为空间反对称，当两粒子的坐标重合时波函数不连续，因而定义一个对称形式的费米子波函数

$$\psi_+(z_1, z_2) = \mathrm{sgn}(z_1 - z_2)\psi_F(z_1, z_2), \quad (8)$$

波函数 ψ_+ 在两粒子的坐标重合处波函数连续，即

$$\psi_+(z_1, z_2)\big|_{z_1 = z_2 - 0^+} = \psi_+(z_1, z_2)\big|_{z_1 = z_2 + 0^+}。\quad (9)$$

假设两粒子情形下对称形式的波函数 $\psi_+(z_1, z_2)$ 具有平面波形式

$$\psi_+(z_1, z_2) = Ae^{i\lambda|z_1 - z_2|}, \quad (10)$$

其中 A 为波函数振幅。将相互作用边界条件作用到该波函数上，可以得到这两个费米子的相对动量分别为

$$\lambda_+ = \left(-i + \sqrt{-1 - \frac{4\xi_p}{l_p}}\right)(2\xi_p)^{-1}, \quad (11)$$

$$\lambda_- = \left(-i - \sqrt{-1 - \frac{4\xi_p}{l_p}}\right)(2\xi_p)^{-1}。\quad (12)$$

当散射长度 $l_p > 0$ 且 $\mathrm{Im}\,\lambda_+ > 0$ 时，将式(11)带入式(10)中，可以得到系统的波函数

$$\psi_+(z_1, z_2) = Ae^{\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4\xi_p}{l_p}}\right)(2\xi_p)^{-1}|z_1 - z_2|}, \quad (13)$$

此时系统处于束缚态。在波函数(13)的基础上，对于 N 个粒子的系统，系统的最低能态可以构造为[16]

$$\psi_F(z_1, \cdots, z_N) \propto \prod_{l<j}\mathrm{sgn}(z_l - z_j)\prod_{l<j}e^{i\lambda_+|z_l - z_j|}。\quad (14)$$

在不考虑有效力程的情形(即零程相互作用)下，$\xi_p = 0$，根据玻色—费米映射理论，一维费米气体的相互作用强度(即散射长度) l_p 与一维玻色气体的相互作用强度 c 的关系为[19]

$$c = -\frac{2}{l_p}。\quad (15)$$

可以看出，散射长度 $l_p > 0$ 时的一维 p 波相互作用费米气体与相互作用强度 $c < 0$ 的 Lieb-Liniger 模型类似，系统会体现出多个粒子的聚集行为，并不适合于讨论热力学极限下的情况，因此在研究中主要考虑散射长度 $l_p < 0$ 的情况，即粒子间为吸引的相互作用。在 $l_p < 0$ 的情况下，若两粒子的相对位置 $z_0 \to 0^+$，这时引入 δ 函数的一阶导数 δ′，因其与处在两粒子相互作用范围内的波函数有关[20]，可以发现在相互作用范围的边界点处表明了散射过程中两粒子的接触条件，而依据接触条件，可以严格推导出哈密顿量中粒子间赝势的表达式。

2　理论推导过程及讨论

在零程相互作用($\xi_p = 0$)下，低能极限下一维 p 波相互作用费米气体中两粒子的接触条件为[19—20]

$$\psi_F(0+) = -\psi_F(0-) = -a_{1D}^F\psi_F'(0\pm), \quad (16)$$

其中 a_{1D}^F 为散射长度。

在一维相对坐标下，包含有 N 个粒子的 p 波相互作用费米气体的哈密顿量可以写为

$$H_{1D}^F = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\partial_z^2 + V_{1D}^F, \quad (17)$$

其中，V_{1D}^F 为赝势，μ 为两粒子的折合质量，相对坐标 $z = z_i - z_j$，$i, j = 1, 2, \cdots, N$。

赝势可定义为

$$V_{1D}^{F} = g_{1D}^{F}\delta'(z)\ \partial_z, \tag{18}$$

其中 g_{1D}^{F} 为一维耦合系数。

费米子波函数 $\psi_F(z)$ 在 $z\to0^+$ 附近的波函数可用阶跃函数 $\Theta(z)$ 描述,当 $z>0$ 时 $\Theta(z)$ 为1,当 $z<0$ 时 $\Theta(z)$ 为0。阶跃函数 $\Theta(z)$ 具有如下性质

$$\frac{\partial}{\partial z}\Theta(z)\Big|_{z=0} = \delta(z), \tag{19}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}\Theta(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}\delta(z)\,\mathrm{d}z = 1, \tag{20}$$

因此在 $z=0$ 点处有

$$\partial_z\psi_F(z) = [\psi_F(0+) - \psi_F(0-)]\delta(z), \tag{21}$$

$$\partial_z^2\psi_F(z) = [\psi_F(0+) - \psi_F(0-)]\delta'(z)。 \tag{22}$$

将哈密顿量作用到波函数上,可以得到

$$H_{1D}^{F}\psi_F(z)\big|_{z=0+} = \left[-\frac{\hbar^2}{\mu}\psi_F(0+) + g_{1D}^{F}\psi_F'(0+)\right]\delta'(z), \tag{23}$$

其中 $\delta'(z)$ 与相互作用范围之内的波函数有关,其系数应当为0,因此可得

$$\psi_F(0+) = \frac{g_{1D}^{F}\mu}{\hbar^2}\psi_F'(0+), \tag{24}$$

与一维p波费米气体的接触条件(16)比较,可得[20]

$$g_{1D}^{F} = -2a_{1D}^{F}\frac{\hbar^2}{m}。 \tag{25}$$

因此,赝势可以写为[19]

$$V_{1D}^{F} = -\frac{2\hbar^2 a_{1D}^{F}}{m}\frac{\partial}{\partial_z}\delta(z)\ \frac{\partial}{\partial_z}, \tag{26}$$

即为忽略有效力程这一相互作用参数下得到的赝势形式。

若忽略一维p波费米气体相互作用边界条件的有效力程($\xi_p=0$),则边界条件(7)可写为

$$\lim_{z\to0^+}\left(\frac{1}{l_p} + \partial_z\right)\psi_F(z) = 0, \tag{27}$$

而接触条件可写为

$$\frac{1}{a_{1D}^{F}}\psi_F(0+) + \psi_F'(0+) = 0。 \tag{28}$$

现将一维相互作用边界条件(27)与接触条件(28)比较,可以发现 $l_p = a_{1D}^{F}$,显然忽略有效力程的相互作用边界条件与粒子间的接触条件是等价的。

考虑有效力程的相互作用边界条件(7)可以写为

$$\lim_{z\to0^+}[1 + l_p\,\partial_z(1-\xi_p\,\partial_z)]\psi_F(z) = 0, \tag{29}$$

根据上式的表达式形式,类比于赝势定义(18),包含两个相互作用参数的赝势形式可定义为

$$\tilde{V}_{1D}^{F} = g_1(1-g_2\,\partial_z)\,\delta'(z)\ \partial_z。 \tag{30}$$

此时的哈密顿量可表示为

$$\tilde{H}_{1D}^{F} = -\frac{\hbar^2}{2\mu}\partial_z^2 + \tilde{V}_{1D}^{F}, \tag{31}$$

将其作用在波函数上可以得到

$$\tilde{H}_{1D}^{F}\psi_F(z)\big|_{z=0^+} = \left[-\frac{\hbar^2}{\mu}\psi_F(0+) + g_1(1-g_2\,\partial_z)\,\psi_F'(0+)\right]\delta'(z); \tag{32}$$

同理,消去 $\delta'(z)$ 项后,可得到

$$\psi_F(0+) = \frac{[g_1(1-g_2\,\partial_z)\,\mu]}{\hbar^2}\psi_F'(0+), \tag{33}$$

定义一个新的粒子间接触条件

$$\psi_F(0+) = -\psi_F(0-) = -\tilde{a}_{1D}^{F}\psi_F'(0\pm), \tag{34}$$

有

$$[g_1(1-g_2\,\partial_z)] = -2\tilde{a}_{1D}^{F}\frac{\hbar^2}{m}。 \tag{35}$$

因此,赝势形式为

$$\tilde{V}_{1D}^{F} = -\frac{2\hbar^2\tilde{a}_{1D}^{F}}{m}\frac{\partial}{\partial_z}\delta(z)\ \frac{\partial}{\partial_z}。 \tag{36}$$

将包含有效力程 ξ_p 的相互作用边界条件(7)与新的粒子间接触条件(34)比较,可以得出

$$g_1 = -2\,l_p\frac{\hbar^2}{m}, \tag{37}$$

$$g_2 = \xi_p。 \tag{38}$$

在得到 g_1、g_2 两个相互作用因子后,可以将包含有效力程 ξ_p 这一相互作用参数的新接触条件写为

$$\psi_F(0+) = -\psi_F(0-) = -l_p(1-\xi_p\,\partial_z)\,\psi_F'(0\pm)。 \tag{39}$$

根据前面推导的结果,可以将两个相互作用参数下的赝势形式写为

$$\tilde{V}_{1D}^{F} = -\frac{2\hbar^2 l_p}{m}\frac{\partial}{\partial_z}\delta(z)\ \frac{\partial}{\partial_z} + \frac{2\hbar^2 l_p\xi_p}{m}\frac{\partial^2}{\partial_z^2}\delta(z)\frac{\partial}{\partial_z}。 \tag{40}$$

综上可知,在忽略有效力程的情况下,新的接触条件(39)与普适的费米子间的接触条件(16)相同,赝势(40)与忽略有效力程所得出的赝势(26)形式一致。

新的赝势形式(40)与接触条件(39)给出了包含散射长度和有效力程两个相互作用参数的模

型的哈密顿量及粒子间的相互作用关系。在此基础上可以利用 Bethe Ansatz 得到一维吸引相互作用下 p 波费米气体的精确解,由此可以准确导出该多体系统的基态、激发态及热力学性质。

3 结论

在一维 p 波吸引相互作用费米气体系统中,通过进一步分析零程相互作用下有效哈密顿量的赝势形式得出了相互作用边界条件与粒子间接触条件的等价性。将相互作用参数有效力程 ξ_p 引入模型,得出了包含两种相互作用参数的系统的哈密顿量赝势,它建立在粒子间相互作用边界条件的基础上,给出了同时包含散射长度 l_p 和有效力程 ξ_p 的哈密顿量,同时得到了这种情形下新的粒子间接触条件,它们在零程相互作用下依然适用。

参考文献:

[1] SUTHERLAND B.70 years of exactly solved quantum many-body problems[M].Singapore: World Scientific, 2004.

[2] PAREDES B, WLDERA A, MURG V, et al.Tonks-Girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice[J]. Nature, 2004, 429(6989): 277-281.

[3] KINOSHITA T, WENGER T, WEISS D S.Observation of a one-dimensional Tonks-Girardeau gas [J]. Science, 2004, 305(5687): 1125-1128.

[4] YANG B, CHEN Y Y, ZHENG Y G, et al.Quantum criticality and the Tomonaga-Luttinger liquid in one-dimension Bose gases [J]. Physical Review Letters, 2017, 119(16): 165701.

[5] GUAN X W, BATCHELOR M T , LEE C H.Fermi gases in one dimension: from Bethe ansatz to experiments[J].Reviews of Modern Physics, 2013, 85(4): 1633-1691.

[6] LIEB E H, LINIGER W.Exact analysis of an interacting Bose gas.I.the general solution and the ground state[J]. Physical Review, 1963, 130(4): 1605-1616.

[7] LIEB E H.Exact analysis of an interacting Bose gas.II. the excitation spectrum[J]. Physical Review, 1963, 130(4): 1616-1624.

[8] JIANG Y Z, CHEN Y Y, GUAN X W.Understanding many-body physics in one dimension from the Lieb-Liniger model [J]. Chinese Physics B, 2015, 24 (5): 050311.

[9] 彭黎,管习文.Lieb-Liniger 模型: 多体物理之美[C]//杨文力,杨战营,杨涛,等.可积模型方法及其应用.北京: 科学出版社,2019: 79-125.

[10] CHEON T, SHIGEHARA T.Realizing discontinuous wave functions with renormalized short-range potentials [J].Physics Letter A, 1998, 243(3): 111-116.

[11] CHEON T, SHIGEHARA T.Fermion-Boson duality of one-dimensional quantum particles with generalized contact interaction[J].Physical Review Letters, 1999, 82(12): 2536-2539.

[12] GIRARDEAU M D, WRIGHT E M.Static and dynamic properties of trapped fermionic Tonks-Girardeau gases [J].Physical Review Letters, 2005, 95(1): 010406.

[13] BENDER S A, ERKER K D, GRANGER B E.Exponentially decaying correlations in a gas of strongly interacting spin-polarzied 1D fermions with zero-range interactions [J]. Physical Review Letters, 2005, 95 (23): 230404.

[14] GIRARDEAU M D, MINGUZZI A. Bosonization, pairing, and superconductivity of the fermionic Tonks-Girardeau gas [J]. Physical Review Letters, 2006, 96 (8): 080404.

[15] PRICOUPENKO L. Resonant scattering of ultracold atoms in low dimension [J]. Physical Review Letters, 2008, 100(17): 170404.

[16] IMAMBEKOV A, LUKYANOV A A, GLAZMAN L I, et al.Exact solution for 1D spin-polarized fermions with resonant interactions [J]. Physical Review Letters, 2010, 104(4): 040402.

[17] CHEN X L, LIU X J, HU H.Probing an effective-range-induced super fermionic Tonks-Girardeau gas with ultracold atoms in one-dimensional harmonic traps [J]. Physical Review A, 2016, 94(3): 033630.

[18] YIN X G, GUAN X W, ZHANG Y B, et al.Momentum distribution and contacts of one-dimensional spinless Fermi gases with an attractive p-wave interaction [J]. Physical Review A, 2018, 98(2): 023605.

[19] HAO Y J, ZHANG Y B, CHEN S.One-dimensional fermionic gases with attractive p-wave interaction in a hard-wall trap [J]. Physical Review A, 2007, 76 (6): 063601.

[20] GIRARDEAU M D, NGUYEN H, OLSHANII M. Effective interactions, Fermi-Bose duality, and ground states of ultracold atomic vapors in tight de Broglie waveguides [J]. Optics Communications, 2004, 243(1/2/3/4/5/6): 3-22.

Pseudopotential of One-dimensional Fermi Gas with Attractive p-wave Interaction

HAO Yihang, WANG Meishan

(School of Physics and Optoelectronic Engineering, Ludong University, Yantai 264039, China)

Abstract: The contact condition between two particles in one-dimensional Fermi gas with zero-range p-wave interaction was analyzed, and the equivalence of contact condition and interaction boundary condition has been found. By using the method of introducing δ′ function, the pesudopotential and contact condition by considering both scattering length and effective range were presented.

Keywords: one-dimensional Fermi gas; effective range; pseudopotential; contact condition

(责任编辑　李秀芳)

(上接第108页)

Abstract ID: 1673-8020(2021)02-0103-EA

A Statistical Measure of the Impact of COVID-19 Outbreak on Consumer Confidence

XING Linxue, YU Haisheng

(School of Mathematics and Statistics Science, Ludong University, Yantai 264039, China)

Abstract: Public health emergencies affect socio-economic development. In this paper, data analysis was conducted based on data in 31 provincial levels from January to July in 2020 and COVID-19 epidemic real-time data released by the National Health Commission. By studying the relationship among the five subjects of the COVID-19 epidemic, such as public, government, medical, media and epidemic, the regression model and structural equation model were used to empirically analyze the relationship between COVID-19 epidemic and consumer confidence index, which provides policy suggestions for the response to major public health emergencies.

Keywords: COVID-19 epidemic; consumer confidence; correlation analysis

(责任编辑　顾建忠)