

一类具有非线性传染率 SEIS 模型的定性分析

徐雪璇, 赵建东

(鲁东大学 数学与统计科学学院, 山东 烟台 264039)

摘要: 考虑出生率和死亡率不同, 建立具有非线性传染率的 SEIS 传染病模型, 讨论此模型正平衡点的存在性和模型无病平衡点的局部稳定性。根据 Routh-Hurwitz 判据得到正平衡点局部稳定的充要条件, 并利用 Lyapunov 函数给出无病平衡点和正平衡点全局渐近稳定的充分条件。最后, 用数值模拟说明主要结果的正确性。

关键词: SEIS 模型; 非线性传染率; 平衡点; 稳定性

中图分类号: O175.1 文献标志码: A 文章编号: 1673-8020(2021)03-0200-07

在传染病模型中, 传染率是指在一定单位时间内, 一组人群中新出现的病例数。在标准的传染病模型^[1-3]中传染率是关于染病类 I 和易感类 S 的双线性函数 βSI 。以后的研究发现这种传染率存在缺陷, 因此, 许多学者引入了更加符合实际的非线性传染率^[4-6]。文献[7]讨论了传染率为 $\lambda I^p S^q / (1 + v I^{p-1})$ 和 $\lambda H(I, S) I$ 的 SIRS 和 SEIRS 模型, 文献[8]讨论了传染率为 $\lambda I^p S^q$ 的 SEIRS 模型。近年来, 具有非线性传染率的传染病模型, 包括自治模型^[9-12]和非自治模型^[13-15], 受到广泛关注。

基于文献[8]中的模型, 考虑出生率和死亡率不同, 本文提出以下 SEIS 模型:

$$\begin{cases} S' = \Lambda - \lambda I^p S^q - \mu S + \gamma I, \\ E' = \lambda I^p S^q - (\varepsilon + \mu) E, \\ I' = \varepsilon E - (\gamma + \mu) I, \end{cases} \quad (1)$$

其中, S, E, I 分别表示种群中易感、潜伏、感染的部分, $\lambda I^p S^q$ 为传染率, ε 为潜伏者的感染率, γ 为感染者恢复并获得暂时性免疫的速率, Λ 和 μ 分别为出生率和死亡率。以上参数均为正数。

本文研究模型(1)的平衡点及其稳定性。主要讨论无病平衡点的局部稳定性, 给出正平衡点的存在性及局部稳定的充要条件; 进一步, 利用 Lyapunov 函数讨论无病平衡点和正平衡点的全局稳定性。

1 平衡点的存在性

令 $S + E + I = N$, 将模型(1)中三个方程相加得

$$N' = \Lambda - \mu N, \quad (2)$$

解得: $N = \Lambda/\mu - (\Lambda/\mu - N_0) e^{-\mu t}$, 其中 N_0 为初始条件。显然 $N = \Lambda/\mu$ 是式(2)的一个解, 且有 $\lim_{t \rightarrow +\infty} (N - \Lambda/\mu) = 0$ 。因此 $N = \Lambda/\mu$ 是方程(2)的一个全局渐近稳定的平衡点。由上述分析得到以下结论:

引理 1 集合

$$\Omega = \{(S, E, I) \in \mathbf{R}_+^3 \mid S + E + I = \Lambda/\mu\}$$

是模型(1)的正不变集, 且对模型(1)的所有解是全局吸引的。

因此, 本文在集合 Ω 上讨论模型(1), 该模型总有无病平衡点 $(\Lambda/\mu, 0, 0)$ 。下面讨论模型(1)正平衡点的存在性, 即方程组

收稿日期: 2021-01-05; 修回日期: 2021-04-14

基金项目: 山东省自然科学基金(ZR2018AM045)

第一作者简介: 徐雪璇(1996—), 女, 山东临沂人, 硕士研究生, 研究方向为生物数学。E-mail: 631761786@qq.com

通信作者简介: 赵建东(1967—), 男, 山东邹城人, 教授, 硕士研究生导师, 博士, 研究方向为生物数学。E-mail: jdzhaol@ldu.edu.cn

$$\begin{cases} \Lambda - \lambda I^p S^q - \mu S + \gamma I = 0, \\ \lambda I^p S^q - (\varepsilon + \mu) E = 0, \\ \varepsilon E - (\gamma + \mu) I = 0 \end{cases}$$

正解的存在性。由第三个方程得到

$$E = \frac{\gamma + \mu}{\varepsilon} I, \tag{3}$$

要得到正解, E 和 I 均为正数。任意平衡点必满足 $\lambda I^p (\Lambda/\mu - E - I)^q = (\varepsilon + \mu) E$, 将式 (3) 代入方程组, 得

$$I^{p-1} (\Lambda/\mu - I/H)^q = 1/\sigma, \tag{4}$$

其中, $H = \varepsilon/(\gamma + \varepsilon + \mu)$, $\sigma = \lambda \varepsilon / [(\gamma + \mu)(\varepsilon + \mu)]$ 。因此, 式 (4) 的每一个小于 $\Lambda H/\mu$ 的正根 I 都对应模型 (1) 的一个正平衡点; 一旦 I 确定, 式 (3) 就给出了 E , 从而 $S = \Lambda/\mu - I/H > 0$ 。

考虑式 (4) 的解。令 $I^{p-1} (\Lambda/\mu - I/H)^q = f(I)$, 对 $f(I)$ 求导得

$$f'(I) = I^{p-2} (\Lambda/\mu - I/H)^{q-1} [(p-1)(\Lambda/\mu - I/H) - qI/H]。$$

下面对 p 分三种情况讨论:

1) $0 < p < 1$ 。 $f'(I) < 0$, $f(I)$ 严格单调递减。当 $I = \Lambda H/\mu$ 时, $f(I) = 0$; 当 $I \rightarrow 0$ 时, $f(I) \rightarrow +\infty$ 。因此, 无论 σ 取何值, 曲线 $f(I)$ 与直线 $1/\sigma$ 仅有 1 个交点 (见图 1(a)), 此时模型 (1) 有唯一的正平衡点。

2) $p = 1$ 。 $f'(I) < 0$, $f(I)$ 严格单调递减。当 $I = \Lambda H/\mu$ 时, $f(I) = 0$; $I = 0$ 时, $f(I) = (\Lambda/\mu)^q$ 。曲线如图 1(b) 所示, 可以看到: 当 $\sigma < (\Lambda/\mu)^{-q}$ 时, 曲线 $f(I)$ 与直线 $1/\sigma$ 没有交点, 模型 (1) 无正平衡点; 当 $\sigma = (\Lambda/\mu)^{-q}$ 时, 曲线 $f(I)$ 与直线 $1/\sigma$ 有 1 个交点, 但此时 $I = 0$, 因此模型 (1) 无正平衡点; 当 $\sigma > (\Lambda/\mu)^{-q}$ 时, 曲线 $f(I)$ 与直线 $1/\sigma$ 有 1 个交点, 模型 (1) 有唯一的正平衡点。注意, 当 $\sigma \rightarrow (\Lambda/\mu)^{-q} + 0$ 时, 正平衡点趋近于无病平衡点。

3) $p > 1$ 。令 $f'(I) = 0$ 得到 $f(I)$ 的极值点 $I_m = \Lambda H(p-1)/\mu(p+q-1)$ 。当 $I < I_m$ 时, $f'(I) > 0$; 当 $I > I_m$ 时, $f'(I) < 0$ 。因此 I_m 为极大值点, 极大值为 $f(I_m) = 1/\sigma^*$, 其中 $\sigma^* = (\Lambda/\mu)^{-(p+q-1)} (p+q-1)^{p+q-1} / [(p-1)^{p-1} q^q H^{p-1}]$, 且当 $I = \Lambda H/\mu$ 或 $I = 0$ 时, $f(I) = 0$ 。由图 1(c) 可以得到: 当 $\sigma < \sigma^*$ 时, 曲线 $f(I)$ 与直线 $1/\sigma$ 没有交点, 模型 (1) 无正平衡点; 当 $\sigma = \sigma^*$ 时, 曲线 $f(I)$ 与直线 $1/\sigma$ 有 1 个交点, 模型 (1) 有 1 个正平衡点; 当 $\sigma > \sigma^*$ 时, 曲线 $f(I)$ 与直线 $1/\sigma$ 有 2 个交点, 即 $f(I) = 1/\sigma$ 有两个解, 不妨设为 I_1 和 I_2 , 且 $I_1 < I_2$, 此时模型 (1) 有 2 个正平衡点, I_1 对应的平衡点称为小正平衡点, I_2 对应的平衡点称为大正平衡点。注意: 当 $\sigma \rightarrow \sigma^* + 0$ 时, 2 个正平衡点相互靠近合并为 1 个正平衡点; 当 $\sigma > \sigma^*$ 且 $p \rightarrow 1 + 0$ 时, 小正平衡点趋近于无病平衡点。

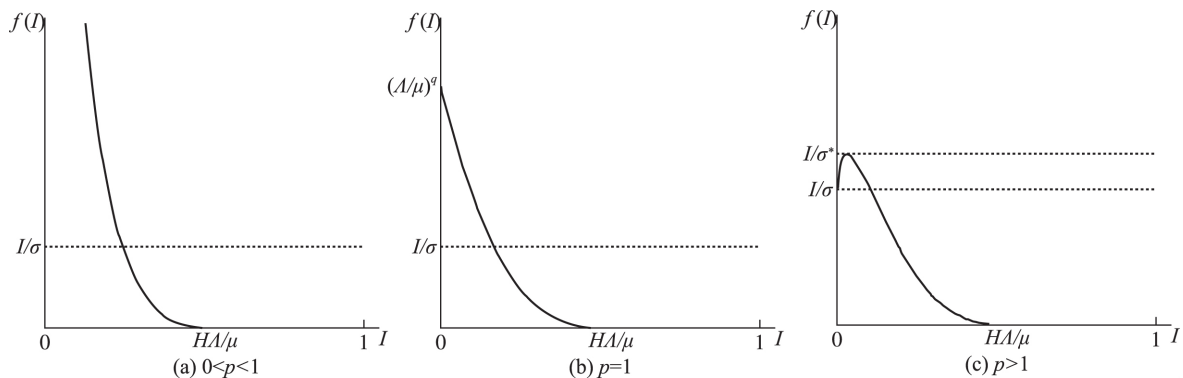


图 1 正平衡点的个数

由以上分析可得平衡点存在的条件:

定理 1 模型(1)总有无病平衡点 $(\Lambda/\mu, 0, 0)$ 。(i) 当 $0 < p < 1$ 时,模型(1)有唯一的正平衡点;(ii) 当 $p = 1, \sigma > \mu/\Lambda$ 时,模型(1)有唯一的正平衡点;(iii) 对于 $p > 1$,当 $\sigma = \sigma^*$ 时,模型(1)有 1 个正平衡点;当 $\sigma > \sigma^*$ 时,模型(1)有 2 个正平衡点。

2 平衡点的稳定性

本节分别讨论无病平衡点和正平衡点的稳定性。

2.1 无病平衡点的稳定性

由 $S + E + I = \Lambda/\mu$, 模型(1)可简化为二维模型

$$\begin{cases} E' = \lambda^p (\Lambda/\mu - E - I)^q - (\varepsilon + \mu) E, \\ I' = \varepsilon E - (\gamma + \mu) I, \end{cases} \quad (5)$$

其平衡点 $(0, 0)$ 对应模型(1)的无病平衡点。

当 $p > 1$ 时,模型(5)在平衡点 $(0, 0)$ 处的 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -(\varepsilon + \mu) & 0 \\ 0 & -(\gamma + \mu) \end{bmatrix},$$

其特征值为 $\lambda_1 = -(\varepsilon + \mu), \lambda_2 = -(\gamma + \mu)$ 。由于平衡点 $(0, 0)$ 是局部稳定的,从而模型(1)的无病平衡点是局部稳定的。

当 $p = 1$ 时,模型(5)在平衡点 $(0, 0)$ 处的 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -(\varepsilon + \mu) & \lambda(\Lambda/\mu)^q \\ \varepsilon & -(\gamma + \mu) \end{bmatrix},$$

其特征值为 $\lambda_{1,2} = \frac{-(\varepsilon + \gamma + 2\mu) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, 其中

$$\Delta = (\varepsilon + \gamma + 2\mu)^2 - 4[(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu) - \lambda\varepsilon(\Lambda/\mu)^q].$$

当 $(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu) > \lambda\varepsilon(\Lambda/\mu)^q$ 时,即 $\sigma < (\Lambda/\mu)^{-q}$,所有特征值均有负实部,平衡点 $(0, 0)$ 是局部稳定的,即模型(1)的无病平衡点是局部稳定的;当 $\sigma = (\Lambda/\mu)^{-q}$ 时,有一个零特征值和一个负特征值,模型(5)存在一个稳定的中心流形,即模型(1)存在一个稳定的中心流形;当 $\sigma > (\Lambda/\mu)^{-q}$ 时,有一个正特征值和一个负特征值,平衡点 $(0, 0)$ 是不稳定的,即模型(1)的无病平衡点是不稳定的。

由以上分析可得模型(1)的无病平衡点的局部稳定性如下:

定理 2 (i) 对于 $p > 1$,模型(1)的无病平衡点是局部稳定的。(ii) 对于 $p = 1$,当 $\sigma < (\Lambda/\mu)^{-q}$ 时,模型(1)的无病平衡点是局部稳定的;当 $\sigma = (\Lambda/\mu)^{-q}$ 时,模型(1)存在一个稳定的中心流形;当 $\sigma > (\Lambda/\mu)^{-q}$ 时,模型(1)的无病平衡点是不稳定的。

按照定理 2,当 $p = 1$ 时, $R_0 = \sigma(\Lambda/\mu)^{-q}$ 为基本再生数,它等于在感染期间与感染者充分接触的平均人数。进一步可以看出:如果 $R_0 < 1$,每个感染者至多感染一个新的感染者,疾病消亡;如果 $R_0 > 1$,每个感染者有足够的接触数来保持疾病的流行。

下面讨论模型(1)的无病平衡点的全局稳定性。对于模型(5),考虑 Lyapunov 函数

$$L = E + \frac{\varepsilon + \mu}{\varepsilon} I,$$

求导得

$$L' = \frac{(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)}{\varepsilon} I \left[\sigma \frac{\Lambda}{\mu} (E + I)^{p-1} - 1 \right] \quad (6)$$

当 $p = 1, \sigma \leq (\Lambda/\mu)^{-q}$ 时, $L' \leq 0$ 。等号成立的两种情况分别为:(a) $\sigma = (\Lambda/\mu)^{-q}$ 且 $E = I = 0$;(b) $I = 0$ 。若 $I = 0$ 且 $E \neq 0$,则 $I' = \varepsilon E$,从集合 (E, I) 出发的解不再返回,一旦 $I \neq 0$,则 $L' < 0$;若 $I = E = 0$,

则 $I' = E' = 0$ 。因此 $L' = 0$ 的最大正不变集为 $(E, I) = (0, 0)$ 。根据 Lyapunov-LaSalle 定理, 平衡点 $(0, 0)$ 是全局渐近稳定的, 即 $\{(E, I) \mid E \geq 0, I \geq 0, E + I \leq \Lambda/\mu\}$ 内的所有解趋向于原点。

当 $p > 1$ 时, 令 $f_1(I) = \sigma I^{p-1} (\Lambda/\mu - I)^q$ 。当 $I = \Lambda(p-1)/\mu(p+q-1)$ 时, $f_1(I)$ 有最大值 $1/\sigma_1$, 其中 $\sigma_1 = (\Lambda/\mu)^{-(p+q-1)} (p+q-1)^{p+q-1} / [(p-1)^{p-1} q^q]$ 。当 $\sigma < \sigma_1$ 时, $\sigma I^{p-1} (\Lambda/\mu - E - I)^q \leq \sigma I^{p-1} (\Lambda/\mu - I)^q \leq \sigma/\sigma_1 < 1$, 由式 (6) 知 $L' \leq 0$, 当且仅当 $I = 0$ 时等号成立。若 $I = 0$ 且 $E \neq 0$, 则 $I' = \varepsilon E$, 从集合 (E, I) 出发的解不再返回, 一旦 $I \neq 0$, 则 $L' < 0$; 若 $I = E = 0$, 则 $I' = E' = 0$ 。因此 $L' = 0$ 的最大正不变集为 $(E, I) = (0, 0)$ 。根据 Lyapunov-LaSalle 定理, 平衡点 $(0, 0)$ 是全局渐近稳定的。

当 $0 < p < 1$ 时, $(\Lambda/\mu - E - I)^q > 0$ 在原点附近是有界的, 存在充分小的 I , 使得 $L' > 0$ 。因此, 当 $0 < p < 1$ 时, 模型 (5) 的所有解都远离原点。

由以上分析可得模型 (1) 的无病平衡点的全局稳定性如下:

定理 3 (i) 当 $p = 1, \sigma \leq (\Lambda/\mu)^{-q}$ 时, 模型 (1) 的无病平衡点是全局渐近稳定的; (ii) 当 $p > 1, \sigma < \sigma_1$ 时, 模型 (1) 的无病平衡点是全局渐近稳定的; (iii) 当 $0 < p < 1$ 时, 模型 (1) 的无病平衡点是不稳定的。

2.2 正平衡点的稳定性

模型 (5) 的正平衡点 (E^*, I^*) 对应模型 (1) 的正平衡点 (S^*, E^*, I^*) 。则模型 (5) 在正平衡点 (E^*, I^*) 处的 Jacobian 矩阵为

$$J = \begin{bmatrix} -(bHy + \varepsilon + \mu) & bp - bHy \\ \varepsilon & -(\gamma + \mu) \end{bmatrix},$$

其中

$$y = \frac{qI^*}{\Lambda H/\mu - I^*} = \frac{q\mu I^*}{\Lambda H - \mu I^*}, \quad b = \frac{\lambda}{\sigma} = \frac{(\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)}{\varepsilon}.$$

则特征多项式为 $T(x) = x^2 + a_1x + a_0$, 其中

$$a_1 = bHy + \varepsilon + \gamma + 2\mu, \quad a_0 = (\varepsilon + \mu)(\gamma + \mu)(y + 1 - p).$$

根据 Routh-Hurwitz 判据, 正平衡点稳定的充要条件为 $a_0 > 0, a_1 > 0$ 。

当 $0 < p \leq 1$ 时, $a_0 > 0, a_1 > 0$ 成立。由定理 1 知, 当 $0 < p < 1$ 或 $p = 1$ 且 $\sigma > (\Lambda/\mu)^{-q}$ 时, 模型 (1) 有唯一的正平衡点, 且正平衡点是局部稳定的。

当 $p > 1$ 时, 若 $\sigma < \sigma^*$, 则正平衡点不存在; 若 $\sigma = \sigma^*$, 则 $I^* = I_m$, 从而 $y = p - 1, a_0 = 0$, 唯一的正平衡点是不稳定的; 若 $\sigma > \sigma^*$, 模型 (1) 有 2 个正平衡点, 对于 $I^* \in [0, H\Lambda/\mu]$, y 是 I^* 的增函数, 而 $I_1^*, I_2^*, I_m \in [0, H\Lambda/\mu]$, 因此, 在 I_1^* 对应的小正平衡点处 $y < p - 1, a_0 < 0$, 在 I_2^* 对应的大正平衡点处 $y > p - 1, a_0 > 0, a_1 > 0$, 从而, 小正平衡点总是不稳定的, 大正平衡点是局部稳定的。

由以上分析, 得到以下结论:

定理 4 (i) 当模型 (1) 有唯一的正平衡点时, 其局部稳定的充要条件为 $a_0 > 0, a_1 > 0$; (ii) 当模型 (1) 有 2 个正平衡点时, 小正平衡点是不稳定的, 大正平衡点是局部稳定的充要条件为 $a_0 > 0, a_1 > 0$ 。

下面讨论模型 (1) 的正平衡点的全局稳定性。考虑 Lyapunov 函数

$$L = \frac{1}{2} [(S - S^*)^2 + (E - E^*)^2 + (I - I^*)^2],$$

求导得

$$\begin{aligned} L' &= (S - S^*) S' + (E - E^*) E' + (I - I^*) I' = \\ &= (S - S^*) [\lambda S^q (I - I^*) f(I) - \lambda I^{*p} (S - S^*) g(S) - \mu(S - S^*) + \gamma(I - I^*)] + \\ &+ (E - E^*) [\lambda S^q (I - I^*) f(I) + \lambda I^{*p} (S - S^*) g(S) - (\varepsilon + \mu)(E - E^*)] + \\ &+ (I - I^*) [\varepsilon(E - E^*) - (\gamma + \mu)(I - I^*)] = \end{aligned}$$

$$-(S - S^*)^2 [\lambda I^{*p} g(S) + \mu] - (S - S^*) (E - E^*) [\lambda I^{*p} g(S)] - (S - S^*) (I - I^*) [\lambda S^q f(I) - \gamma] - (\varepsilon + \mu) (E - E^*)^2 - (E - E^*) (I - I^*) [-\lambda S^q f(I) - \varepsilon] - (\gamma + \mu) (I - I^*)^2, \quad (7)$$

其中

$$I^p - I^{*p} = (I - I^*) f(I) \quad S^q - S^{*q} = (S - S^*) g(S)。$$

显然, $f(I) > 0, g(S) > 0$ 。

令 $X = (S - S^* \quad E - E^* \quad I - I^*)$, 方程(7)可化为 $L' = -XAX^T$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} \lambda I^{*p} g(S) + \mu & -\frac{1}{2} \lambda I^{*p} g(S) & \frac{1}{2} [\lambda S^q f(I) - \gamma] \\ -\frac{1}{2} \lambda I^{*p} g(S) & \varepsilon + \mu & -\frac{1}{2} [\lambda S^q f(I) + \varepsilon] \\ \frac{1}{2} [\lambda S^q f(I) - \gamma] & -\frac{1}{2} [\lambda S^q f(I) + \varepsilon] & \gamma + \mu \end{bmatrix}。$$

当满足下面三个条件: (i) $\lambda I^{*p} g(S) + \mu > 0$; (ii) $4[\lambda I^{*p} g(S) + \mu](\varepsilon + \mu) > [\lambda S^q f(I) - \gamma]^2$; (iii) $|A| > 0$, 可以推得 A 是正定的, 从而有 $L' < 0$ 。模型(1)的正平衡点是全局渐近稳定的。显然, 条件(i)恒成立。由以上分析, 得到以下结论:

定理5 如果 $4[\lambda I^{*p} g(S) + \mu](\varepsilon + \mu) > [\lambda S^q f(I) - \gamma]^2$ 且 $|A| > 0$, 那么模型(1)的正平衡点是全局渐近稳定的。

3 数值模拟

在模型(5)中, 取 $p = 1, q = 1, \varepsilon = 1, \gamma = 0.133, \mu = 0.00004, \Lambda = 0.00005, \lambda = 0.1$ 。通过计算得到 $\sigma\Lambda/\mu = 0.94 < 1$, 满足定理3的条件(ii), 如图2(a)所示, 模型(5)的无病平衡点(0, 0)是全局渐近稳定的。保持其他参数值不变, 取 $\gamma = 0.08$, 通过计算得到 $\sigma\Lambda/\mu = 1.56 > 1$, 满足定理1和定理5的条件, 如图2(b)所示, 模型(5)唯一的正平衡点(0.03, 0.42)是全局渐近稳定的。

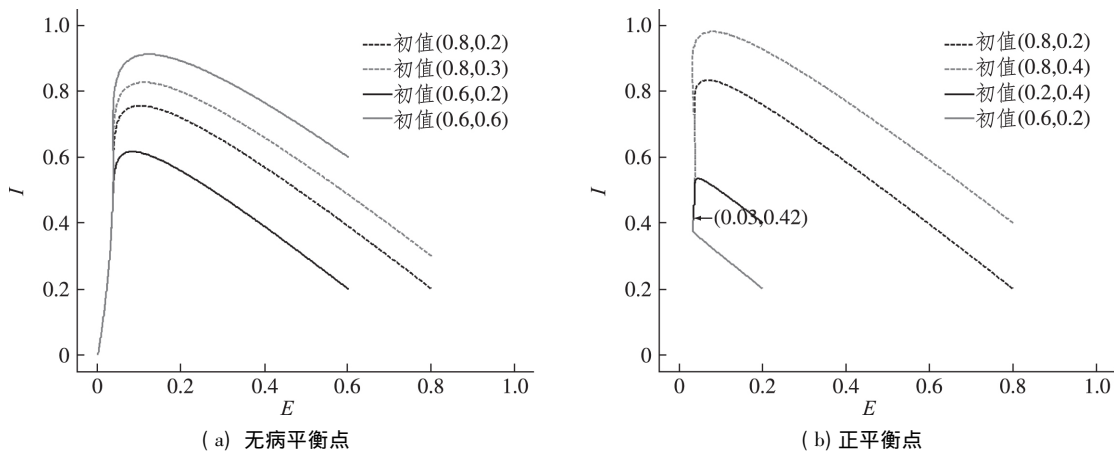


图2 $p = 1$ 时模型(5)的轨线
Fig.2 The trajectories of model (5) with $p = 1$

在模型(5)中, 取 $p = 2, q = 1, \varepsilon = 1, \gamma = 0.133, \mu = 0.00004, \Lambda = 0.00005, \lambda = 0.1$, 通过计算得到 $\sigma = 0.75 < \sigma^* = 2.90$, 满足定理3的条件(ii), 如图3(a)所示, 模型(5)的无病平衡点(0, 0)是全局渐近稳定的。保持其他参数值不变, 取 $\lambda = 1, \gamma = 0.2$, 通过计算得到 $\sigma = 2.93 > \sigma^* = 2.90$, 满足定理1和定理5的条件, 模型(5)有大正平衡点(0.17, 0.84)和小正平衡点(0.04, 0.20) (图3(b))。由图3(b)得, 大正平衡点(0.17, 0.84)是全局渐近稳定的。

在模型(5)中, 取 $p = 0.6, q = 1, \varepsilon = 1, \gamma = 0.5, \mu = 0.00004, \Lambda = 0.00005, \lambda = 1$, 满足定理1和定理

4 的条件, 如图 4 所示, 模型 (5) 唯一的正平衡点 (0.28, 0.57) 是全局渐近稳定的。

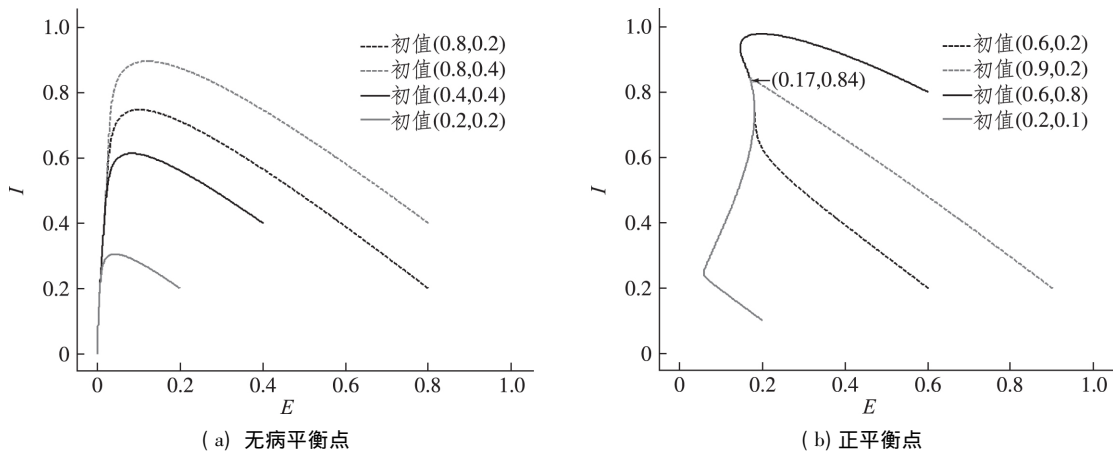


图 3 $p > 1$ 时模型 (5) 的轨线

Fig.3 The trajectories of model (5) with $p > 1$

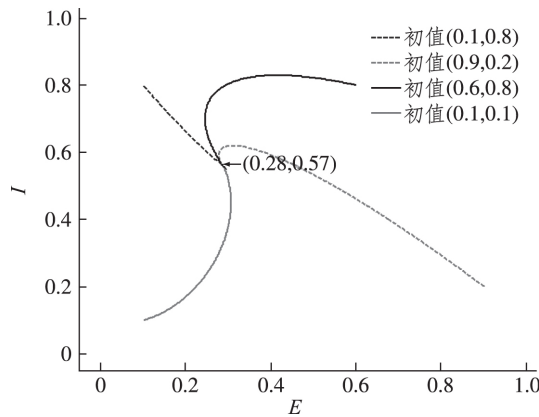


图 4 $0 < p < 1$ 时模型 (5) 的轨线

Fig.4 The trajectories of model (5) with $0 < p < 1$

4 结论

考虑出生率和死亡率不同, 本文建立了一类具有非线性传染率 $\lambda I^p S^q$ 的 SEIS 传染病模型, 讨论无病平衡点的稳定性, 得到了正平衡点存在和稳定的条件。从本文的主要结论可以得到传染病流行和消亡的阈值, 即: 对于 $p = 1$, $R_0 = \sigma (\Lambda/\mu)^{-q}$ 为基本再生数, 当 $R_0 < 1$, 疾病消亡, 当 $R_0 > 1$, 传染病流行成为地方病; 对于 $p > 1$, 阈值是 σ/σ^* , 当 $\sigma/\sigma^* < 1$, 传染病消亡, 当 $\sigma/\sigma^* > 1$, 传染病流行成为地方病。

当 $p = 1$, $q = 1$ 时, 传染率即为 λIS , 文献 [16] 研究了传染率为 λIS 的 SEIS 传染病模型无病平衡点和地方病平衡点的全局稳定性, 这些结果是本文定理 3 和定理 5 的特例。

参考文献:

[1] BAILEY N T J. The mathematical theory of infectious diseases and its applications [M]. 2th ed. London: Griffin, 1975.

[2] LIU X. A class of SIRS epidemiological models with at least two limit cycles [J]. Journal of Biomathematics, 1999, 14(2): 141-144.

[3] WANG J J, ZHANG J Z, JIN Z. Analysis of an SIR model with bilinear incidence rate [J]. Nonlinear Analysis Real World Applications, 2010, 11(4): 2390-2402.

- [4] WILSON E B ,WORCESTER J.The law of mass action in epidemiology [J].Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America ,1945 ,31(1) : 24–34.
- [5] SEVERO N C.Generalizations of some stochastic epidemic models [J].Mathematical Biosciences ,1969 ,4(1) : 395–402.
- [6] CAPASSO V ,SERIO G.A generalization of the Kermack–McKendrick deterministic epidemic model [J].Mathematical Biosciences ,1978 ,42(1) : 43–61.
- [7] LIU W M ,LEVIN S A ,IWASA Y.Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of SIRS epidemiological models [J].Journal of Mathematical Biology ,1986 ,23(2) : 187–204.
- [8] LIU W M ,HETHCOTE H W ,LEVIN S A.Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates [J].Journal of Mathematical Biology ,1987 ,25(4) : 359–380.
- [9] CHENG Y ,YANG X.On the global stability of SEIRS models in epidemiology [J].Canadian Applied Mathematics Quarterly ,2012 ,20(2) : 115–133.
- [10] LI M Y ,MULDOWNEY J S ,DRIESSCHE P V D.Global stability of SEIRS models in epidemiology [J].Canadian Applied Mathematics Quarterly ,1999 ,7(4) : 409–425.
- [11] LI M Y ,MULDOWNEY J S.Global stability for the SEIR model in epidemiology [J].Mathematical Biosciences ,1995 ,125(2) : 155–164.
- [12] MUKHERJEE D ,CHATTOPADHYAY J ,TAPASWI P K.Global stability results of epidemiological models with nonlinear incidence rates [J].Mathematical and Computer Modelling ,1993 ,18(2) : 89–92.
- [13] ERIC A V ,ERIKA R E ,EMILIO G A G.Global dynamics of a periodic SEIRS model with general incidence rate [J].International Journal of Differential Equations ,2017 ,7: 1–14.
- [14] HERZOG G ,REDHEFFER R.Nonautonomous SEIRS and Thron models for epidemiology and cell biology [J].Nonlinear Analysis: Real World Applications ,2004 ,5(1) : 33–44.
- [15] MATEUS J P ,SILVA C M.Existence of periodic solutions of a periodic SEIRS model with general incidence [J].Nonlinear Analysis: Real World Applications ,2017 ,34: 379–402.
- [16] LI J ,NING C ,NIU L , et al.Dynamic analysis of an SEIS model with bilinear incidence rate [C]//International Conference on Computer Science and Network Technology ,2012.

Qualitative Analysis of an SEIS Model with Nonlinear Incidence Rates

XU Xuexuan , ZHAO Jiandong

(School of Mathematics and Statistics Science ,Ludong University ,Yantai 264039 ,China)

Abstract: Considering the difference of the birth rate and death rate ,an SIES model with incidencerates was proposed.At first ,the existence of the positive equilibria was discussed ,then the local stability of the disease-free equilibrium was analyzed ,and the sufficient and necessary conditions for the local stability of the positive equilibria were obtained by Routh–Hurwitz criterion.Furthermore ,the sufficient conditions for the globally asymptotic stability of the disease-free equilibrium and the positive equilibria were given by using Lyapunov function.Finally ,the main results were illustrated by some simulations.

Keywords: SEIS model; nonlinear incidence rates; equilibrium; stability

(责任编辑 顾建忠)