鲁东大学学报(自然科学版)
Journal of Ludong University(Natural Science Edition) 2021,37(4):289—297

基于 Razumikhin 方法的 n 阶随机非线性时变时滞系统的输出反馈控制

尹 力,王天成

(鲁东大学 数学与统计科学学院,山东 烟台 264039)

摘要:本文通过引入 Razumikhin 方法解决具有时变时滞的随机非线性系统的输出反馈依概率全局渐近稳定问题。基于 Razumikhin 方法和反推设计技术,构造合适的观测器和 Lyapunov 函数,从而使闭环系统依概率全局渐近稳定。通过本文设计的控制方案,彻底消除了传统结果对时滞导数的限制。最后的仿真实例证明了该方法的有效性。

关键词:Razumikhin 定理;时变时滞;随机系统;输出反馈;非线性系统
中图分类号:TP273 文献标志码:A 文章编号:1673-8020(2021)04-0289-09

在许多工程系统中经常遇到时滞和随机现象,例如航天系统、通讯系统、工业控制系统、网络传输及化学反应系统、电力系统等,这些系统仅通过无记忆静态输出反馈难以实现稳定,需使用带有时滞的静态输出反馈控制器[1—6],而时滞的存在使得随机控制器的设计更加复杂困难[7—10]。在过去一段时间,带有时滞的随机系统稳定性成为控制领域的热点问题,具有重要的理论和实际意义[11—19]。由文献[20—23]启发,本文利用 Razumikhin 方法,对文献[22—23]中二阶系统的输出反馈镇定问题进行研究,同时去掉时滞导数的条件限制,将结果一般化。结果表明,本文设计的控制器可以使系统的平衡点依概率全局渐近稳定。

本文主要研究如下 n 阶系统:

$$\begin{cases}\mathrm{d}x_i(t)=(x_{i+1}(t)+f_i(\bar{x}_i(t),\bar{x}_i(t-\tau(t))))\mathrm{d}t+\boldsymbol{g}_i^{\mathrm{T}}(\bar{x}_i(t),\bar{x}_i(t-\tau(t)))\mathrm{d}\boldsymbol{w},i=1,2,\cdots,n-1,\\ \mathrm{d}x_n(t)=(u(t)+f_n(\bar{x}_n(t),\bar{x}_n(t-\tau(t))))\mathrm{d}t+\boldsymbol{g}_n^{\mathrm{T}}(\bar{x}_n(t),\bar{x}_n(t-\tau(t)))\mathrm{d}\boldsymbol{w},\\ y(t)=x_1(t),\\ \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\varphi}\in C_{F_0}^b([-\tau,0];\mathbf{R}^n),-\tau\leqslant t\leqslant 0。\end{cases} \tag{1}$$

其中:$\boldsymbol{x}(t)=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t))^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$,$u(t)\in\mathbf{R}$,$y(t)\in\mathbf{R}$ 分别表示系统的状态、输入和输出;状态 $x_2(t),x_3(t),\cdots,x_n(t)$ 是不能测量的,$\bar{x}_i(t)=(x_1(t),x_2(t)\cdots,x_i(t))^{\mathrm{T}}$,$\bar{x}_i(t-\tau(t))=(x_1(t-\tau(t)),x_2(t-\tau(t)),\cdots,x_i(t-\tau(t)))^{\mathrm{T}}$,$i=1,2,\cdots,n$;时变时滞状态 $\tau(t)$ 是 Borel 可测函数,且满足 $0\leqslant\tau(t)\leqslant\tau$;$w$ 定义在概率空间(Ω,F,P)上,Ω 代表样本空间,F 代表一类仿射函数,P 代表概率测度;函数 f_i:$\mathbf{R}^i\times\mathbf{R}^i\to\mathbf{R}$ 和 g_i:$\mathbf{R}^i\times\mathbf{R}^i\to\mathbf{R}^m$ 关于 $\bar{x}_i(t)$,$\bar{x}_i(t-\tau(t))$ 是局部 Lipschitz 的,且满足 $f_i(\mathbf{0},\mathbf{0})=0$,$g_i(\mathbf{0},\mathbf{0})=\mathbf{0}$,$i=1,2,\cdots,n$;$C_{F_0}^b([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$ 表示所有 F_0 可测集合 $C([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$ 上随机变量全体 $\boldsymbol{\varphi}=\{\boldsymbol{\varphi}(\theta):-\tau\leqslant\theta\leqslant 0\}$。

关于状态、输出反馈的镇定问题,文献[17—23]提出有效的控制方法。Lyapunov-Krasovskii 函数是解决这类系统的有效方法之一,但要求时滞 $\tau(t)$ 满足 $\dot{\tau}(t)\leqslant\gamma<1$,$\gamma>0$ 为常数。在时变时滞导数

收稿日期:2020-11-20;修回日期:2021-04-23
基金项目:国家自然科学基金(11371226)
第一作者简介:尹力(1996—),女,山东德州人,硕士研究生,研究方向为非线性控制。E-mail:1027900334@qq.com
通信作者简介:王天成(1967—),男,山东烟台人,教授,硕士研究生导师,博士,研究方向为随机非线性控制。E-mail:cumt-wtc@163.com

不受限制的情况下,如何使用 Razumikhin 定理处理时变时滞随机系统具有一定挑战。目前,关于二阶随机系统输出反馈镇定问题的研究已有相关结果,本文将这一结果推广到 n 阶随机系统,使结果更具一般性。

1 预备知识

以下记号贯穿全文。$|X|$ 是向量 X 的欧氏范数; C^i 为具有 i 阶连续偏导数的所有函数的集合; $C^{1,2}([-\tau,\infty)\times\mathbf{R}^n;\mathbf{R}_+)$ 是定义在 $[-\tau,\infty)\times\mathbf{R}^n$ 的所有非负函数 $V(t,x)$ 的集合,且关于分量 t 是 C^1,关于分量 x 为 C^2。

考虑如下系统:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))\mathrm{d}t+\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau(t)))\mathrm{d}\boldsymbol{w},t\geqslant 0, \tag{2}$$

其中,初始条件 $\{\boldsymbol{x}(\theta):-\tau\leqslant\theta\leqslant 0\}=\boldsymbol{\varphi}\in C_{F_0}^b([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$, $\tau(t):\mathbf{R}_+\to[0,\tau]$ 是 Borel 可测的, $\boldsymbol{w}$ 是概率空间 (Ω,F,P) 上的标准 n 维维纳过程; Borel 可测函数 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^n\times C[-\tau,0]\to\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{g}:\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^n\times C[-\tau,0]\to\mathbf{R}^{n\times n}$ 是局部 Lipschitz 的。

定义 1[16] 针对系统(2),对于任意给定的函数 $V(t,\boldsymbol{x}(t))\in C^{1,2}$,定义微分算子 L 为:

$$LV(t,\boldsymbol{x}(t))=\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial V}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 V}{\partial^2\boldsymbol{x}}\boldsymbol{g}\right)。$$

引理 1[20] (Razumikhin-Mao 定理) 设存在 Lyapunov 函数 $V(t,\boldsymbol{x})\in C^{1,2}([-\tau,\infty)\times\mathbf{R}^n;\mathbf{R}_+)$,以及正常数 $\lambda_1,\lambda_2,\mu,r$ 和 $q>1$,使得 $\lambda_1|\boldsymbol{x}|^r\leqslant V(t,\boldsymbol{x})\leqslant\lambda_2|\boldsymbol{x}|^r$,并且对于所有 $t\geqslant 0$,以及任意 $-\tau\leqslant\theta\leqslant 0$, $\boldsymbol{x}_t(\theta)=\boldsymbol{x}(t+\theta)\in L_{F_t}^r([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$,当 $EV(t+\theta,\boldsymbol{x}_t(\theta))<qEV(t,\boldsymbol{x}(t))$ 时,有 $ELV(t,\boldsymbol{x}(t))\leqslant-\mu EV(t,\boldsymbol{x}(t))$,则对于所有 $\boldsymbol{\varphi}\in C_{F_0}^b([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$,系统(2)的平衡点 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是依概率全局渐近稳定的(GAS),这里, $L_{F_t}^r([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$ 定义为所有 F_t 可测的 $C([-\tau,0];\mathbf{R}^n)$ 上随机变量 $\boldsymbol{x}_t(\theta)$ 的集合,且 $\sup\limits_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}E|\boldsymbol{x}_t(\theta)|^r<\infty$。

引理 2[19] 设 x,y 为任意实数, $m,n>0$,对于任意常数 $c>0$,有下列不等式成立:

$$x^m y^n\leqslant c|x|^{m+n}+\frac{n}{m+n}\left(\frac{m}{c(m+n)}\right)^{\frac{m}{n}}|y|^{m+n}。$$

引理 3[19] 设二元函数 $f(x,s)$ 的偏导数连续,则:

$$f(x,s)-f(\hat{x},\hat{s})=f_x(\theta_1,s)(x-\hat{x})+f_s(\hat{x},\theta_2)(s-\hat{s}),$$

这里, θ_1 是 x 和 $\hat{x}$ 之间的均值, θ_2 是 s 和 $\hat{s}$ 之间的均值。

证明 $f(x,s)-f(\hat{x},\hat{s})=f(x,s)-f(\hat{x},s)+f(\hat{x},s)-f(\hat{x},\hat{s})$,由于二元函数 $f(x,s)$ 的偏导函数是连续的,由拉格朗日中值定理,存在 θ_1 介于 x 和 $\hat{x}$ 之间,以及 θ_2 介于 s 和 $\hat{s}$ 之间,使得:

$$f(x,s)-f(\hat{x},s)=f_x(\theta_1,s)(x-\hat{x}),\ f(\hat{x},s)-f(\hat{x},\hat{s})=f_s(\hat{x},\theta_2)(s-\hat{s}),$$

两式相加得到:

$$f(x,s)-f(\hat{x},\hat{s})=f_x(\theta_1,s)(x-\hat{x})+f_s(\hat{x},\theta_2)(s-\hat{s})。$$

2 控制器设计

设系统(1)满足如下假设条件:

假设 1 存在常数 $b>0$,有:

$$|f_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i(t),\bar{\boldsymbol{x}}_i(t-\tau(t)))|\leqslant b\left(\sum_{j=1}^{i}|x_j(t)|+\sum_{j=1}^{i}|x_j(t-\tau(t))|\right),$$

$$|g_i(\bar{x}_i(t),\bar{x}_i(t-\tau(t)))|^2 \leqslant b\left(\sum_{j=1}^{i}|x_j(t)|^2+\sum_{j=1}^{i}|x_j(t-\tau(t))|^2\right), i=1,2,\cdots,n。$$

假设2　函数 $f_i, i=2,3,\cdots,n$ 在不可测变量上的偏导数是全局有界的,即存在已知常数 $L>0$,有:

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right| \leqslant L, \left|\frac{\partial f_i}{\partial x_{j\tau}}\right| \leqslant L,$$

这里 $x_{j\tau}=x_j(t-\tau(t)), i,j=2,3,\cdots,n(j\leqslant i)$。

2.1　状态反馈控制器设计

首先,本节假设所有的状态都可测,构造状态反馈控制器。定义 $x_i=x_i(t),\xi_i=\xi_i(t),\eta_i=\eta_i(t)=\xi_i(t-\tau(t)), x_{i\tau}=x_i(t-\tau(t)), i=1,2,\cdots,n$。

第1步:选取误差变量 $\xi_1=x_1$ 和 Lyapunov 函数 $V_1(\xi_1)=\frac{1}{4}\xi_1^4$,结合假设1和引理2,得到:

$$\begin{aligned}LV_1(\xi_1)&=\xi_1^3(x_2+f_1(x_1,x_1(t-\tau(t))))+\frac{3}{2}\xi_1^2|g_1(x_1,x_1(t-\tau(t)))|^2\leqslant\\&\xi_1^3(x_2-x_2^*)+\xi_1^3x_2^*+b|\xi_1|^3(|\xi_1|+|\eta_1|)+\frac{3}{2}b|\xi_1|^2(|\xi_1|^2+|\eta_1|^2)=\\&\xi_1^3(x_2-x_2^*)+\xi_1^3x_2^*+\frac{5b}{2}\xi_1^4+b|\xi_1|^3|\eta_1|+\frac{3b}{2}\xi_1^2\eta_1^2\leqslant\\&\xi_1^3(x_2-x_2^*)+\xi_1^3x_2^*+\frac{5b}{2}\xi_1^4+c_1\xi_1^4+\frac{1}{n}\eta_1^4,\end{aligned}$$

这里 $c_1=\frac{3b}{4}\left[\left(\frac{nb}{2}\right)^{\frac{1}{3}}+\frac{3nb}{2}\right]$。选取虚拟控制器 x_2^* 为:

$$x_2^*=-\left(\lambda+n-1+\frac{5b}{2}+c_1\right)\xi_1=-\alpha_1\xi_1,$$

其中 $\alpha_1=\lambda+n-1+\frac{5b}{2}+c_1$,则 $LV_1(\xi_1)\leqslant-(\lambda+n-1)\xi_1^4+\xi_1^3(x_2-x_2^*)+\frac{1}{n}\eta_1^4$,$\lambda>0$ 是待设计的常数。

假设在 $k-1$ 步 $(2\leqslant k\leqslant n)$ 有正定 Lyapunov 函数 $V_{k-1}(\bar{\xi}_{k-1})=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{k-1}\xi_i^4$,其中:

$$\begin{cases}\xi_1=x_1-x_1^*=x_1,\\\xi_2=x_2-x_2^*=x_2+\alpha_1\xi_1,\\\quad\vdots\\\xi_k=x_k-x_{k-1}^*=x_k+\alpha_{k-1}\xi_{k-1},\end{cases}\tag{3}$$

这里,$\alpha_i>0(1\leqslant i\leqslant k-1)$,$x_1^*,x_2^*,\cdots,x_k^*$ 是虚拟控制器,分别定义为 $x_1^*=0, x_2^*=-\alpha_1\xi_1,\cdots,x_k^*=-\alpha_{k-1}\xi_{k-1}$。则可以得到:

$$LV_{k-1}(\bar{\xi}_{k-1})\leqslant-\sum_{i=1}^{k-1}(\lambda+n-k+1)\xi_i^4+\xi_{k-1}^3(x_k-x_k^*)+\frac{k-1}{n}\sum_{i=1}^{k-1}\eta_i^4。\tag{4}$$

由式(1)和(3),有:

$$\begin{aligned}d\xi_i=&\left(x_{i+1}+\sum_{j=2}^{i}\alpha_{i-1}\alpha_{i-2}\cdots\alpha_{j-1}x_j+f_i+\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{i-1}\alpha_{i-2}\cdots\alpha_jf_j\right)dt+\\&\left(g_i^{\mathrm{T}}+\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{i-1}\alpha_{i-2}\cdots\alpha_jg_j^{\mathrm{T}}\right)d\boldsymbol{w}。\end{aligned}\tag{5}$$

第 k 步:考虑 Lypaunov 函数 $V_k(\bar{\xi}_k)=V_{k-1}(\bar{\xi}_{k-1})+\frac{1}{4}\xi_k^4$,由式(3)~(5),有:

$$LV_k(\bar{\xi}_k) \leqslant -\sum_{i=1}^{k-1}(\lambda_i + n - k + 1)\xi_i^4 + \xi_{k-1}^3(x_k - x_k^*) + \frac{k-1}{n}\sum_{i=1}^{k-1}\eta_i^4 +$$

$$\xi_k^3 x_{k+1} + \xi_k^3\sum_{i=2}^{k}\alpha_{k-1}\alpha_{k-2}\cdots\alpha_{i-1}x_i + \xi_k^3 f_k + \xi_k^3\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_{k-1}\alpha_{k-2}\cdots\alpha_i f_i + \frac{3}{2}\xi_k^2\left|\boldsymbol{g}_k + \sum_{i=1}^{k-1}\alpha_{k-1}\alpha_{k-2}\cdots\alpha_i\boldsymbol{g}_i\right|^2。 \quad (6)$$

利用文献[20]的处理方法,分别得到:

$$\xi_{k-1}^3(x_k - x_k^*) \leqslant \frac{1}{5}\xi_{k-1}^4 + c_{k1}\xi_k^4,\ \xi_k^3\sum_{i=2}^{k}\alpha_{k-1}\alpha_{k-2}\cdots\alpha_{i-1}x_i \leqslant \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{k-1}\xi_i^4 + c_{k2}\xi_k^4,$$

$$\xi_k^3 f_k \leqslant \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{k-1}\xi_i^4 + c_{k3}\xi_k^4 + \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{k-1}\eta_i^4 + \frac{k}{2n}\eta_k^4,\ \xi_k^3\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_{k-1}\alpha_{k-2}\cdots\alpha_i f_i \leqslant \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{k-1}\xi_i^4 + c_{k4}\xi_k^4 + \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{k-1}\eta_i^4,$$

$$\frac{3}{2}\xi_k^2\left|\boldsymbol{g}_k + \sum_{i=1}^{k-1}\alpha_{k-1}\alpha_{k-2}\cdots\alpha_i\boldsymbol{g}_i\right|^2 \leqslant \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{k-1}\xi_i^4 + c_{k5}\xi_k^4 + \frac{1}{3n}\sum_{i=1}^{k-1}\eta_i^4 + \frac{k}{2n}\eta_k^4,$$

其中 $c_{k1},c_{k2},\cdots,c_{k5}$ 是正常数。从而由式(6),得:

$$LV_k(\bar{\xi}_k) \leqslant -\sum_{i=1}^{k-1}(\lambda + n - k)\xi_i^4 + \frac{k}{n}\sum_{i=1}^{k}\eta_i^4 + \xi_k^3(x_{k+1} - x_{k+1}^*) + \xi_k^3 x_{k+1}^* + (c_{k1} + \cdots + c_{k5})\xi_k^4。$$

取虚拟控制器 x_{k+1}^* 如下:

$$x_{k+1}^* = -(\lambda + n - k + c_{k1} + \cdots + c_{k5})\xi_k = -\alpha_k\xi_k, \quad (7)$$

其中,$\alpha_k = \lambda + n - k + c_{k1} + \cdots + c_{k5}$,从而得到:

$$LV_k(\bar{\xi}_k) \leqslant -\sum_{i=1}^{k}(\lambda + n - k)\xi_i^4 + \frac{k}{n}\sum_{i=1}^{k}\eta_i^4 + \xi_k^3(x_{k+1} - x_{k+1}^*)。 \quad (8)$$

第 n 步:对系统(1),考虑 Lyapunov 函数

$$V_n(\bar{\xi}_n) = V_{n-1}(\bar{\xi}_{n-1}) + \frac{1}{4}\xi_n^4 = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^4。 \quad (9)$$

由式(7)~(9),有 $LV_n(\bar{\xi}_n) \leqslant -\lambda\sum_{i=1}^{n}\xi_i^4 + \sum_{i=1}^{n}\eta_i^4 + \xi_n^3(u - u^*) + \xi_n^3 u^* + (c_{n1} + \cdots + c_{n5})\xi_n^4$,系统的状态反馈控制器取为:

$$u^* = x_{n+1}^* = -(\lambda + c_{n1} + \cdots + c_{n5})\xi_n = -\alpha_n\xi_n, \quad (10)$$

这里:$\alpha_n = \lambda + c_{n1} + \cdots + c_{n5}$,$\xi_n = \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\cdots\alpha_1 x_1 + \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\cdots\alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n-1}x_{n-1} + x_n$,从而得到:

$$LV_n(\bar{\xi}_n) \leqslant -\sum_{i=1}^{n}\lambda\xi_i^4 + \xi_n^3(u - u^*) + \sum_{i=1}^{n}\eta_i^4。 \quad (11)$$

2.2 输出反馈控制器设计

由于系统(1)的状态 $x_2,x_3,\cdots,x_n$ 是不可测的,本节先构造降维观测器,再设计相应的输出反馈控制器。具体方法如下:

首先,引入新的不可测变量:

$$z_2 = x_2 - l_1x_1, z_3 = x_3 - l_2x_1, \cdots, z_n = x_n - l_{n-1}x_1, \quad (12)$$

这里,$l_i > 1(i = 1,2,\cdots,n-1)$ 是待定增益常数。由式(1)、(12),有:

$$\begin{cases} dz_2 = (x_3 - l_1x_2 + f_2 - l_1f_1)dt + (\boldsymbol{g}_2^{\mathrm{T}} - l_1\boldsymbol{g}_1^{\mathrm{T}})d\boldsymbol{w}, \\ \vdots \\ dz_{n-1} = (x_n - l_{n-2}x_2 + f_{n-1} - l_{n-2}f_1)dt + (\boldsymbol{g}_{n-1}^{\mathrm{T}} - l_{n-2}\boldsymbol{g}_1^{\mathrm{T}})d\boldsymbol{w}, \\ dz_n = (u - l_{n-1}x_2 + f_n - l_{n-1}f_1)dt + (\boldsymbol{g}_n^{\mathrm{T}} - l_{n-1}\boldsymbol{g}_1^{\mathrm{T}})d\boldsymbol{w}。 \end{cases} \quad (13)$$

建立 $n-1$ 维观测器如下:

$$\begin{cases}\mathrm{d}\hat{z}_2=(\hat{z}_3-l_1\hat{z}_2+(l_2-l_1^2)x_1+\hat{f}_2-l_1f_1)\,\mathrm{d}t+(\hat{\boldsymbol{g}}_2^{\mathrm{T}}-l_1\boldsymbol{g}_1^{\mathrm{T}})\,\mathrm{d}\boldsymbol{w},\\ \quad\vdots\\ \mathrm{d}\hat{z}_{n-1}=(\hat{z}_n-l_{n-2}\hat{z}_2+(l_{n-1}-l_{n-2}l_1)x_1+\hat{f}_{n-1}-l_{n-2}f_1)\,\mathrm{d}t+(\hat{\boldsymbol{g}}_{n-1}^{\mathrm{T}}-l_{n-2}\boldsymbol{g}_1^{\mathrm{T}})\,\mathrm{d}\boldsymbol{w},\\ \mathrm{d}\hat{z}_n=(u-l_{n-1}\hat{z}_2+l_{n-1}l_1x_1+\hat{f}_n-l_{n-1}f_1)\,\mathrm{d}t+(\hat{\boldsymbol{g}}_n^{\mathrm{T}}-l_{n-1}\boldsymbol{g}_1^{\mathrm{T}})\,\mathrm{d}\boldsymbol{w},\end{cases}\tag{14}$$

有 $\hat{x}_2=\hat{z}_2+l_1x_1,\hat{x}_3=\hat{z}_3+l_2x_1,\cdots,\hat{x}_n=\hat{z}_n+l_{n-1}x_1$,这里 $\hat{x}_i$ 是 x_i 的估计值。同理,$\hat{f}_i$ 是 f_i 的估计值,$\hat{\boldsymbol{g}}_i$ 是 $\boldsymbol{g}_i$ 的估计值,具体形式为:

$$\hat{f}_i=f_i(\bar{\hat{\boldsymbol{x}}}_i(t),\bar{\hat{\boldsymbol{x}}}_i(t-\tau(t))),\hat{\boldsymbol{g}}_i=\boldsymbol{g}_i(\bar{\hat{\boldsymbol{x}}}_i(t),\bar{\hat{\boldsymbol{x}}}_i(t-\tau(t))),i=2,3,\cdots,n,$$

其中:$\bar{\hat{\boldsymbol{x}}}_i(t)=(x_1(t),\hat{x}_2(t),\cdots,\hat{x}_i(t))^{\mathrm{T}}$。

令 $e_i=x_i-\hat{x}_i=z_i-\hat{z}_i,i=2,3,\cdots,n$. 由式(13)和(14),得到误差动态方程:

$$\begin{cases}\mathrm{d}e_i=((x_{i+1}-\hat{x}_{i+1})-l_{i-1}(x_2-\hat{x}_2)+(f_i-\hat{f}_i))\,\mathrm{d}t+(\boldsymbol{g}_i^{\mathrm{T}}-\hat{\boldsymbol{g}}_i^{\mathrm{T}})\,\mathrm{d}w,i=2,3,\cdots,n-1,\\ \mathrm{d}e_n=-(l_{n-1}(x_2-\hat{x}_2)+(f_n-\hat{f}_n))\,\mathrm{d}t+(\boldsymbol{g}_n^{\mathrm{T}}-\hat{\boldsymbol{g}}_n^{\mathrm{T}})\,\mathrm{d}w。\end{cases}\tag{15}$$

由引理 3 得到:

$$f_2-\hat{f}_2=h_{21}(t)e_2+h_{22}(t)e_{2\tau},\ \boldsymbol{g}_2^{\mathrm{T}}-\hat{\boldsymbol{g}}_2^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{h}_{23}^{\mathrm{T}}(t)e_2+\boldsymbol{h}_{24}^{\mathrm{T}}(t)e_{2\tau},$$
$$f_3-\hat{f}_3=h_{31}(t)e_2+h_{32}(t)e_{2\tau}+h_{33}(t)e_3+h_{34}(t)e_{3\tau},$$
$$\boldsymbol{g}_3^{\mathrm{T}}-\hat{\boldsymbol{g}}_3^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{h}_{35}^{\mathrm{T}}(t)e_2+\boldsymbol{h}_{36}^{\mathrm{T}}(t)e_3+\boldsymbol{h}_{37}^{\mathrm{T}}(t)e_{2\tau}+\boldsymbol{h}_{38}^{\mathrm{T}}(t)e_{3\tau},$$
$$\vdots$$
$$f_n-\hat{f}_n=h_{n1}(t)e_2+h_{n2}(t)e_{2\tau}+\cdots+h_{n,2(n-1)-1}(t)e_n+h_{n,2(n-1)}(t)e_{n\tau},$$
$$\boldsymbol{g}_n^{\mathrm{T}}-\hat{\boldsymbol{g}}_n^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{h}_{n,2(n-1)+1}^{\mathrm{T}}(t)e_2+\boldsymbol{h}_{n,2(n-1)+2}^{\mathrm{T}}(t)e_{2\tau}+\cdots+\boldsymbol{h}_{n,4(n-1)-1}^{\mathrm{T}}(t)e_n+\boldsymbol{h}_{n,4(n-1)}^{\mathrm{T}}(t)e_{n\tau}。$$

根据假设 2,h_{ij} 是独立于 L 的有界函数,$\boldsymbol{h}_{ij}$ 是独立于 L 的有界向量函数。

简化式(15),得到:

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}e_2\\ \mathrm{d}e_3\\ \vdots\\ \mathrm{d}e_{k-1}\\ \mathrm{d}e_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-l_1&1&0&\cdots&0\\ -l_2&0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ -l_{k-2}&0&0&\cdots&1\\ -l_{k-1}&0&0&\cdots&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e_2\\ e_3\\ \vdots\\ e_{k-1}\\ e_k\end{bmatrix}(2\leqslant k\leqslant n)。$$

为了得到更一般的形式,定义矩阵变换:$\boldsymbol{e}=\boldsymbol{\Lambda}\tilde{\boldsymbol{e}}$,其中 $\boldsymbol{e}=(e_2\ \ e_3\ \ \cdots\ \ e_k)^{\mathrm{T}}$,$\tilde{\boldsymbol{e}}=(\tilde{e}_2\ \ \tilde{e}_3\ \ \cdots\ \ \tilde{e}_k)^{\mathrm{T}}$,

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\ \lambda_1+l_1&\lambda_2+l_1&\cdots&\lambda_{k-1}+l_1\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ \lambda_1^{k-3}+l_1\lambda_1^{k-4}+\cdots+l_{k-4}\lambda_1+l_{k-3}&\lambda_2^{k-3}+l_1\lambda_2^{k-4}+\cdots+l_{k-4}\lambda_2+l_{k-3}&\cdots&\lambda_{k-1}^{k-3}+l_1\lambda_{k-1}^{k-4}+\cdots+l_{k-4}\lambda_{k-1}+l_{k-3}\\ -\dfrac{l_{k-1}}{\lambda_1}&-\dfrac{l_{k-1}}{\lambda_2}&\cdots&-\dfrac{l_{k-1}}{\lambda_{k-1}}\end{bmatrix},$$

有:

$$\begin{cases}\mathrm{d}\tilde{e}_2=\left(-m_1l_1\tilde{e}_2+t_{11}\tilde{e}_2+t_{12}\tilde{e}_{2\tau}+\cdots+t_{1,2(k-1)-1}\tilde{e}_k+t_{1,2(k-1)}\tilde{e}_{k\tau}\right)\mathrm{d}t+\\ \quad\left(\boldsymbol{t}_{1,2(k-1)+1}^{\mathrm{T}}\tilde{e}_2+\boldsymbol{t}_{1,2(k-1)+2}^{\mathrm{T}}\tilde{e}_{2\tau}+\cdots+\boldsymbol{t}_{1,4(k-1)-1}^{\mathrm{T}}\tilde{e}_k+\boldsymbol{t}_{1,4(k-1)}^{\mathrm{T}}\tilde{e}_{k\tau}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{w},\\ \quad\vdots\\ \mathrm{d}\tilde{e}_k=\left(-m_{k-1}l_1\tilde{e}_2+t_{k-1,1}\tilde{e}_2+t_{k-1,2}\tilde{e}_{2\tau}+\cdots+t_{k-1,2(k-1)-1}\tilde{e}_k+t_{k-1,2(k-1)}\tilde{e}_{k\tau}\right)\mathrm{d}t+\\ \quad\left(\boldsymbol{t}_{k-1,,2(k-1)+1}^{\mathrm{T}}\tilde{e}_2+\boldsymbol{t}_{k-1,2(k-1)+2}^{\mathrm{T}}\tilde{e}_{2\tau}+\cdots+\boldsymbol{t}_{k-1,4(k-1)-1}^{\mathrm{T}}\tilde{e}_k+\boldsymbol{t}_{k-1,4(k-1)}^{\mathrm{T}}\tilde{e}_{k\tau}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{w}。\end{cases}\tag{16}$$

其中，$\lambda_1=-m_1l_1,\lambda_2=-m_2l_1,\cdots,\lambda_{k-1}=-m_{k-1}l_1(m_i\neq m_j,i\neq j)$。因为 $l_i>1,i=1,2,\cdots,k$，所以 t_{ij}，t_{ij} 均独立于常数 l_i。

由式(10)可以得到控制器为:

$$
\begin{aligned}
u=&-\alpha_n\cdots\alpha_2\alpha_1x_1-\alpha_n\cdots\alpha_3\alpha_2\hat{x}_2-\cdots-\alpha_n\alpha_{n-1}\hat{x}_{n-1}-\alpha_n\hat{x}_n=\\
&-(\alpha_n\cdots\alpha_2\alpha_1+\alpha_n\cdots\alpha_3\alpha_2l_1+\cdots+\alpha_n\alpha_{n-1}l_{n-2}+\alpha_nl_{n-1})x_1-\alpha_n\cdots\alpha_3\alpha_2\hat{z}_2-\cdots-\alpha_n\alpha_{n-1}\hat{z}_{n-1}-\alpha_n\hat{z}_n。
\end{aligned}
\tag{17}
$$

由引理2，估计项

$$
|\xi_n^3(u-u^*)|\leqslant|\xi_n^3|(\alpha_n\alpha_{n-1}\cdots\alpha_2|e_2|+\alpha_n\alpha_{n-1}\cdots\alpha_3|e_3|+\cdots+\alpha_n|e_n|)\leqslant\xi_n^4+\sum_{i=2}^{n}a_i\tilde{e}_i^4,
$$

这里，$a_i>0$ 独立于 λ，l_i。将式(17)代入式(11)有:

$$
LV_n(\bar{\xi}_n)\leqslant-\sum_{i=1}^{n}(\lambda-1)\xi_i^n+\sum_{i=1}^{n}\eta_i^n+\sum_{i=2}^{n}a_i\tilde{e}_i^n。\tag{18}
$$

对误差系统(15)，取Lyapunov函数

$$
W(\tilde{e}_2,\tilde{e}_3,\cdots,\tilde{e}_n)=\frac{1}{4}l\sum_{i=2}^{n}\tilde{e}_i^4,\tag{19}
$$

这里 $l>0$ 是常数。对式(19)求导，可以得到

$$
\begin{gathered}
LW(\tilde{e}_2,\tilde{e}_3,\cdots,\tilde{e}_n)\leqslant\\
-m_1ll_1\tilde{e}_2^4-m_2ll_1\tilde{e}_3^4-\cdots-m_{n-1}ll_1\tilde{e}_n^4+la(\tilde{e}_2^4+\cdots+\tilde{e}_n^4+\tilde{e}_{2\tau}^4+\cdots+\tilde{e}_{n\tau}^4),
\end{gathered}
$$

其中，$a>0$ 是独立于 l,l_1 的常数。对系统(1)和(15)，构造Lyapunov函数

$$
V(\bar{\xi}_n,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3,\cdots,\tilde{e}_n)=V_n(\bar{\xi}_n)+W(\tilde{e}_2,\tilde{e}_3,\cdots,\tilde{e}_n)=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\xi_i^4+\frac{1}{4}l\sum_{i=2}^{n}\tilde{e}_i^4。
$$

由式(18)和(19)，可以得到:

$$
\begin{aligned}
LV(\bar{\xi}_n,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3,\cdots,\tilde{e}_n)\leqslant&-(\lambda-1)\sum_{i=1}^{n}\xi_i^4+\sum_{i=1}^{n}\eta_i^4-(m_1ll_1-la-a_2)\tilde{e}_2-(m_2ll_1-la-a_3)\tilde{e}_3-\\
&\cdots-(m_{n-1}ll_1-la-a_n)\tilde{e}_n+la(\tilde{e}_{2\tau}^4+\tilde{e}_{3\tau}^4+\cdots+\tilde{e}_{n\tau}^4),
\end{aligned}
$$

若参数 λ,l_1,l 满足: $\lambda-1>a+2,m_1l_1-2a-2>0,\cdots,m_{n-1}ll_1-la-a_n\geqslant l(a+2)$，则:

$$
LV(\bar{\xi}_n,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3,\cdots,\tilde{e}_n)\leqslant-(a+2)\sum_{i=1}^{n}\xi_i^4+(a+1)\sum_{i=1}^{n}\eta_i^4-(a+2)l\sum_{i=2}^{n}\tilde{e}_i^4+(a+1)l\sum_{i=2}^{n}\tilde{e}_{i\tau}^4。
$$

当有不等式:

$$
V(\bar{\xi}_n(t-\tau(t)),\tilde{e}_2(t-\tau(t)),\cdots,\tilde{e}_n(t-\tau(t)))<qV(\bar{\xi}_n(t),\tilde{e}_2(t),\cdots,\tilde{e}_n(t))\tag{20}
$$

成立，可以得到

$$
\sum_{i=1}^{n}\eta_i^4+l\sum_{i=2}^{n}\tilde{e}_{i\tau}^4=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^4(t-\tau(t))+l\sum_{i=2}^{n}\tilde{e}_i^4(t-\tau(t))<q\sum_{i=1}^{n}\xi_i^4+ql\sum_{i=2}^{n}\tilde{e}_i^4,
$$

从而进一步得到

$$
LV(\bar{\xi}_n,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3,\cdots,\tilde{e}_n)\leqslant-(a+2-q(a+1))\sum_{i=1}^{n}\xi_i^4(t)-l(a+2-q(a+1))\sum_{i=2}^{n}\tilde{e}_i^4。\tag{21}
$$

定义 $q=\dfrac{1}{2(a+1)}+1$，显然 $q>1$，满足引理1的条件，则有

$$
LV(\bar{\xi}_n,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3,\cdots,\tilde{e}_n)\leqslant-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^4(t)+l\sum_{i=2}^{n}\tilde{e}_i^4\right)=-2V(\bar{\xi}_n,\tilde{e}_2,\tilde{e}_3,\cdots,\tilde{e}_n)。
$$

综上所述，本文主要结果归纳如下:

定理1 在假设1、2成立的前提下，对于随机非线性时变时滞系统(1)，构造输出反馈控制器(17)，可以保证系统有如下结论成立:

(i) 闭环系统在 $[-\tau,\infty)$ 上对于任意连续初始值都几乎处处存在唯一解;

(ii) 系统(1)的解 $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 是依概率全局渐近稳定的。

证明　由式(17)可知

$$u=-\alpha_n\alpha_{n-1}\cdots\alpha_2\alpha_1x_1-\alpha_n\alpha_{n-1}\cdots\alpha_3\alpha_2\hat{x}_2-\cdots-\alpha_n\alpha_{n-1}\hat{x}_{n-1}-\alpha_n\hat{x}_n=$$
$$-\alpha_n\alpha_{n-1}\cdots\alpha_3\alpha_2\hat{z}_2-\cdots-\alpha_n\alpha_{n-1}\hat{z}_{n-1}-\alpha_n\hat{z}_n。$$

则 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\hat{z}_i}$ 是连续的,且 f_i,g_i 满足局部 Lipschitz 条件,故闭环系统(1)和(17)满足局部 Lipschitz 条件,因此系统(1)在 $[-\tau,\infty)$ 上几乎处处存在唯一解。由式(20)和(21)可知,系统(4)满足 Razumikhin 定理条件,且其平衡点 $x=0$ 依概率全局渐近稳定,故系统(1)的解 $x=0$ 也是依概率全局渐近稳定。定理 1 成立。

注　本文主要创新点是将低阶系统的输出反馈镇定问题推广到了高阶系统,同时去掉对时滞导数的取值限制,将结果一般化。

3　仿真算例

本节研究下列系统来验证设计方法的有效性。考虑系统方程为:

$$\begin{cases}\mathrm{d}x_1(t)=(x_2(t)+0.2x_1(t)\sin x_1(t)+0.3x_1(t-1.7|\cos 2t|))\mathrm{d}t+0.1x_1(t)\mathrm{d}w,\\ \mathrm{d}x_2(t)=(x_3(t)+0.1x_2(t-1.7|\cos 2t|))\mathrm{d}t+0.2x_2(t)\mathrm{d}w,\\ \mathrm{d}x_3(t)=(u(t)+0.2x_2(t)+0.1x_3(t-1.7|\cos 2t|))\mathrm{d}t+0.2x_3(t)\mathrm{d}w。\end{cases}\tag{22}$$

取 $\tau(t)=1.7|\cos 2t|$,根据引理 2,易得

$$|f_i(\bar{x}_i(t),\bar{x}_i(t-\tau(t)))|\leqslant 0.3\left(\sum_{j=1}^{i}|x_j(t)|+\sum_{j=1}^{i}|x_j(t-\tau(t))|\right),$$
$$|g_i(\bar{x}_i(t),\bar{x}_i(t-\tau(t)))|\leqslant 0.2\left(\sum_{j=1}^{i}|x_j(t)|+\sum_{j=1}^{i}|x_j(t-\tau(t))|\right),i=1,2,3。$$
$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|\leqslant L,\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_{j\tau}}\right|\leqslant L,i,j=2,3(j\leqslant i)$$

其中 $a=0.2$,$b=0.3$,$L=0.3$。显然,系统(22)满足假设 1、2。

依据本文设计过程,可得观测器、控制器分别为:

$$\mathrm{d}\hat{z}_2=(\hat{z}_3-9.6\hat{z}_2-74.88x_1+0.1\hat{z}_2(t-\tau(t))-1.92x_1(t-\tau(t))-1.92x_1\sin x_1)\mathrm{d}t+(0.2\hat{z}_2+0.96x_1)\mathrm{d}w,$$
$$\mathrm{d}\hat{z}_3=(u-17.08\hat{z}_2+0.1\hat{z}_3(t-\tau(t))-164x_1-3.45x_1\sin x_1-3.45x_1(t-\tau(t)))\mathrm{d}t+(0.2\hat{z}_3+1.72x_1)\mathrm{d}w,$$
$$u(t)=-1029.8x_1-57.78\hat{z}_2-8.46\hat{z}_3。$$

仿真时选取 $x_1(\theta)=0.1$,$x_2(\theta)=0.2$,$x_3(\theta)=\sin\theta(-1.7\leqslant\theta\leqslant 0)$,结果如图 1 ~ 3 所示。可以看到,在控制器 $u(t)$ 的作用下系统状态是依概率渐近稳定的,表明本文提出的控制方法是有效的。

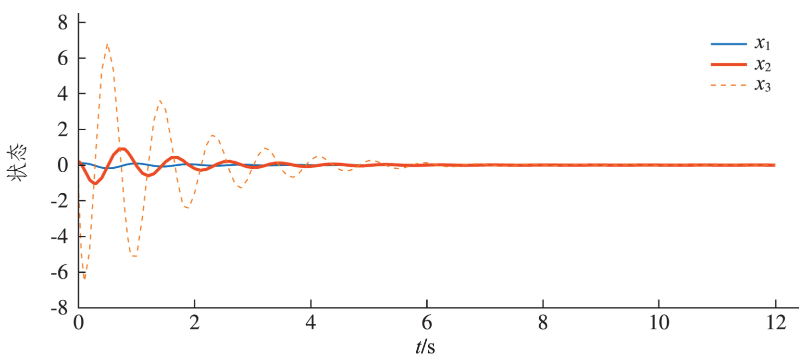

图 1　系统状态响应曲线

Fig.1 The response of system states

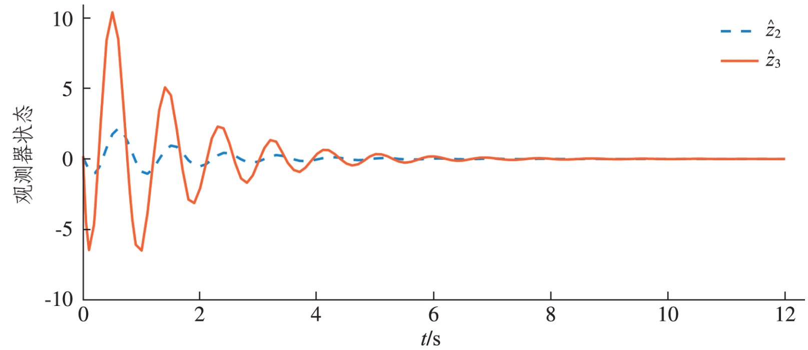

图 2　观测器状态响应曲线

Fig.2 The response of observer states

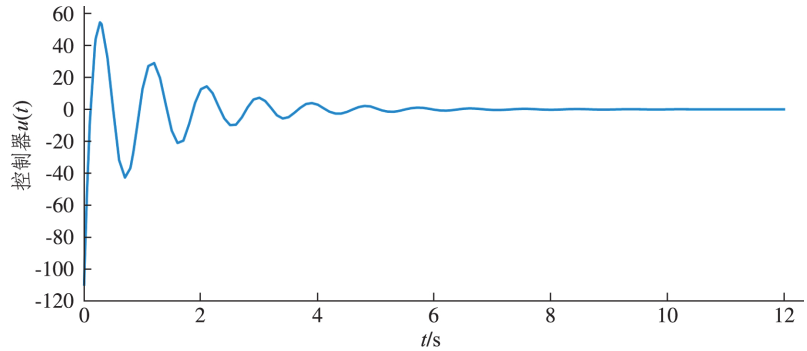

图 3　控制器响应曲线

Fig.3 The response of control input

4　结语

本文通过引入 Razumikhin 方法构造降维观测器，并采用 Backstepping 技术，解决带有时滞的一般 n 阶非线性随机系统的输出反馈依概率渐近稳定问题。如何将本文的系统推广到更一般的高阶随机非线性时变时滞系统，以及如何消除假设 1、2 的限制条件，将是我们下一步研究的重点。

参考文献:

[1] NICULESCU S I,MICHIELS W.Stabilizing a chain of integrators using multiple delays [J].IEEE Transactions on Automatic Control,2004,49(5):802-807.

[2] KHARITONOV V L,NICULESCU S I,MORENO J.Static output feedback stabilization: necessary conditions for multiple delay controllers [J].IEEE Transactions on Automatic Control,2005,50(1):82-86.

[3] KARAFYLLIS I.Global stabilization by means of discrete-delay output feedback [J].Systems and Control Letters,2008,57(12):987-995.

[4] FRENCH M,ILCHMANN A,MUELLER M.Robust stabilization by linear output delay feedback [J]. SIAM Journal on Control and Optimization,2009,48(4):2355-2561.

[5] YAN Z,PARK J H,ZHANG W.Finite-time guaranteed cost control for Itô stochastic Markovian jump systems with incomplete transition rates [J].International Journal of Robust and Nonlinear Control,2017,27(1):66-83.

[6] GU K,KHARITONOV V L,CHEN J.Stability of time-delay systems [M].Boston: Birkhauser,2003.

[7] HALES J K,LUNEL S M V.Introduction to functional differential equations [M].New York: Springer-verlag,1993.

[8] ARNOLD L.Stochastic differential equations: theory and applications [M].New York: Wiley,1972.

[9] MAO X R.Razumikhin-type theorems on exponential stability of stochastic functional differential equations [J].Stochastic Processes and Applications,1996,65(2):233-250.

[10] MICHIELS W,NICULESCU S L.Stability and stabilization of time-delay systems: an eigenvalue-based approach [M].Philadelphia: SIAM,2007.

[11] BOUKAS E K,LIU Z K.Deterministic and stochastic time-delay systems [M].Boston: Birkhauser,2002.

[12] NGUANG S K.Robust stabilization of a class of time-delay nonlinear systems [J].IEEE Transactions on Automatic Control,2000,45(4):756-762.

[13] HUA C C,GUAN X P,SHI P.Robust output feedback tracking control for time-delay nonlinear systems using neural network [J].IEEE Transactions on Neural Networks,2007,18(2):495-505.

[14] MAO X R.Stochastic differential equations and applications [M].Chichester: Horwood Publishing,2007.

[15] QIAN C J,LIN W.A continuous feedback approach to global strong stabilization of nonlinear systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2001,46(7):1061-1079.

[16] QIAN C J,LIN W.Non-Lipschitz continuous stabilizers for nonlinear systems with uncontrollable unstable linearization [J]. Systems and Control Letters,2001,42(1):185-200.

[17] 李武全,井元伟,张嗣瀛.一类高阶次随机非线性系统的输出反馈镇定 [J].控制与决策,2010,25(1):126-129.

[18] 雒晓霞,王天成.高阶随机时变时滞非线性系统的输出反馈 [J].鲁东大学学报(自然科学版),2016,32(3):211-217.

[19] LIU L,XIE X J.Output-feedback stabilization for stochastic high-order nonlinear systems with time-varying delay [J].Automatica,2011,47(12):2772-2779.

[20] 李刚.一类随机时滞非线性系统的状态反馈 [D].烟台:鲁东大学,2015.

[21] 王天成,李刚.基于 Razumikhin 方法的随机时变时滞非线性系统的状态反馈 [J].控制与决策,2015,30(8):1519-1522.

[22] 王妍,王天成.基于 Razumikhin 方法的二阶随机非线性时变时滞系统的输出反馈控制 [J].鲁东大学学报(自然科学版),2020,36(3):193-199.

[23] 王天成,王妍,庄迪.基于 Razumikhin 方法的时变时滞非线性系统的输出反馈镇定 [J/OL].控制与决策: 1-5(2020-07-03) [2020-10-28].https://doi.org/10.13195/j.kzyjc.2020.0304.

Razumikhin-type Approach on Output Feedback Control of n-Order Stochastic Nonlinear Systems with Time-varying Delay

YIN Li, WANG Tiancheng

(School of Mathematics and Statistics Science,Ludong University,Yantai 264039,China)

Abstract: In this paper,Razumikhin method was introduced to solve the output feedback stability problem of stochastic nonlinear systems with time-varying delay. Based on Razumikhin method and Backstepping design technique,an appropriate observer and Lyapunov functions were constructed while eliminating the derivative limitation of time delay,so as to stabilize the output feedback of the closed-loop system. By using the control scheme designed in this paper,the limitation that the derivative of time delay in the traditional results was completely eliminated. Finally,the simulation results showed the effectiveness of the method.

Keywords: Razumikhin theorem; time-varying delay; stochastic system; output feedback; nonlinear system

(责任编辑　顾建忠)