

等温的二相液气模型同族激波的相互作用研究

张 帅 沈 春

(鲁东大学 数学与统计科学学院, 山东 烟台 264039)

摘要: 本文在无粘情况下对等温二相液气模型的一类同族激波的相互作用问题进行研究。利用特征分析法, 详细给出同族的 3-激波之间的相互作用结果是 1-稀疏波和 3-激波。

关键词: 波的相互作用; 特征分析法; 二相流

中图分类号: O175 文献标志码: A 文章编号: 1673-8020(2022)02-0133-06

液气混合流是二相流或多相流^[1]中一个值得关注的课题,在现代工业中,液气混合流模型通常被广泛应用于石油和天然气的管道运输^[2-4]中。在无粘假设下,一个简化的二相液气模型可表示为:

$$\begin{cases} m_t + (mu)_x = 0, \\ n_t + (nu)_x = 0, \\ ((m+n)u)_t + ((m+n)u^2 + p(m,n))_x = 0, \end{cases}$$

其中: $m = \alpha_g \rho_g$ 和 $n = \alpha_l \rho_l$ 分别表示气体和液体的质量, ρ_g 和 ρ_l 分别为气体和液体的密度, $\alpha_g, \alpha_l \in [0, 1]$ 分别为气体和液体的体积分数,且满足 $\alpha_g + \alpha_l = 1$; u 是液气共同的速度。在混合动量方程中,由于气相密度小于液相密度,因此气相动量经常被忽略不计。考虑到混合相的复杂性,即二相的速度可能不同,为明确每相的运动,有必要补充流体力学闭合定律。

本文将采用压力项为 $p(m, n) = A(m+n)$ 的简化等温二相液气模型,且二相的速度相同,具体形式如下:

$$\begin{cases} m_t + (mu)_x = 0, \\ n_t + (nu)_x = 0, \\ (nu)_t + (nu^2 + A(m+n))_x = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中常数 $A > 0$ 。方程组(1)的黎曼问题取如下初始条件:

$$(m, n, \mu)(x, 0) = \begin{cases} (m_-, n_-, \mu_-), & x < 0, \\ (m_+, n_+, \mu_+), & x > 0. \end{cases} \quad (2)$$

目前,许多学者研究了压力项为 $p(m, n) = k(m+n)^\gamma$ 的简化等熵二相模型^[5-8],其中文献[7]针对黎曼问题解的存在性、唯一性和稳定性给出了明确的研究结果,为后续研究波的相互作用奠定了基础。考虑到方程组(1)和(2)的黎曼问题在之前的工作中已得到很好解决,本文进一步研究双曲守恒律方程组(1)的另一个特性,即同族 3-激波的相互作用问题。对于气体动力学来说,文献[9-11]详细研究一维基本波的相互作用,文献[12]详细介绍了等熵磁气动力学方程的黎曼问题和基本波的相互作用,文献[13-14]进一步扩展处理了二相平移流模型一类波的相互作用问题。

本文基于方程组(1)的黎曼解,研究同族激波的相互作用问题,其中两个 3-激波分别从初始点 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 0)$ 发出。因此,考虑方程组(1)满足如下 3 个分片常状态的初始条件:

收稿日期: 2021-06-01; 修回日期: 2021-10-30

基金项目: 国家自然科学基金(11441002); 山东省自然科学基金(ZR2019MA058)

第一作者简介: 张帅(1997—),女,山东泰安人,硕士研究生,研究方向为微分方程及其应用。E-mail: 1509100389@qq.com

通信作者简介: 沈春(1975—),男,安徽池州人,教授,硕士研究生导师,博士,研究方向为微分方程及其应用。E-mail: shenchun3641@sina.com

$$(m \ n \ \mu)(x \ 0) = \begin{cases} (m_- \ n_- \ \mu_-), & -\infty < x \leq x_1, \\ (m_* \ n_* \ \mu_*), & x_1 < x \leq x_2, \\ (m_+ \ n_+ \ \mu_+), & x_2 < x < +\infty, \end{cases} \quad (3)$$

其中, $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ 表示两个初始间断点, 且满足 $x_1 < x_2$ 。为了在两个初始点 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 0)$ 都生成相应的 3-激波 S_3 和 \bar{S}_3 , 需对初始条件(3)作出严格限制。在此限制条件下, 借助 $(u \ m \ n)$ 投影的状态平面, 精确研究两个同族 3-激波 S_3 和 \bar{S}_3 的相互作用问题。值得注意的是, S_3 和 \bar{S}_3 相互作用产生新的 1-稀疏波 \bar{R}_1 和 3-激波 \bar{S}_3 , 但不会产生新的 2-接触间断 \bar{J}_2 。

1 黎曼问题(1)和(2)的解

本节主要简述方程组(1)在满足黎曼初值(2)下的黎曼问题, 该问题相应的精确解可借助文献[7]的方法完整地构造出来。对于给定的左状态 $(m_- \ n_- \ \mu_-)$ 和变化的右状态 $(m \ n \ \mu)$, 方程组(1)的 3 个特征根分别为

$$\lambda_1 = u - \sqrt{\frac{A(m+n)}{n}}, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + \sqrt{\frac{A(m+n)}{n}}.$$

经过计算易得: λ_1 和 λ_3 是真正非线性的, 而 λ_2 是线性退化的。根据自相似变换法, 得到 λ_1 和 λ_3 对应的 1-稀疏波、3-稀疏波分别为

$$R_1(m_- \ n_- \ \mu_-) : \begin{cases} \xi_1 = u - \sqrt{\frac{A(m+n)}{n}}, \\ u = u_- + \sqrt{\frac{A(m_-+n_-)}{n_-}} \ln\left(\frac{m_-+n_-}{m+n}\right), \\ \frac{m}{n} = \frac{m_-}{n_-}, \quad m < m_-, \quad n < n_-, \quad \mu > \mu_-, \end{cases}$$

$$R_3(m_- \ n_- \ \mu_-) : \begin{cases} \xi_3 = u + \sqrt{\frac{A(m+n)}{n}}, \\ u = u_- + \sqrt{\frac{A(m_-+n_-)}{n_-}} \ln\left(\frac{m+n}{m_-+n_-}\right), \\ \frac{m}{n} = \frac{m_-}{n_-}, \quad m > m_-, \quad n > n_-, \quad \mu > \mu_-. \end{cases}$$

接下来, 由 R-H 条件

$$\begin{cases} \sigma[m] = [mu], \\ \sigma[n] = [nu], \\ \sigma[nu] = [nu^2 + A(m+n)], \end{cases}$$

并考虑到相应的 1-激波和 3-激波的熵条件, 可得

$$S_1(m_- \ n_- \ \mu_-) : \begin{cases} \sigma_1 = \frac{(m+n)u - (m_-+n_-)u_-}{m+n-m_- - n_-}, \\ u = u_- - \sqrt{\frac{A}{n_-(m+n)}}(m+n-m_- - n_-), \\ \frac{m}{n} = \frac{m_-}{n_-}, \quad m > m_-, \quad n > n_-, \quad \mu < \mu_-, \end{cases}$$

$$J_2(m_- \ n_- \ \mu_-) : \tau_2 = u = u_-, \quad m+n = m_-+n_-, \quad (4)$$

$$S_3(m_-, n_-, \mu_-) : \begin{cases} \sigma_3 = \frac{(m_+ + n_+) u - (m_- + n_-) u_-}{m_+ + n_+ - m_- - n_-}, \\ u = u_- - \sqrt{\frac{A}{n_- (m_+ + n_+)}} (m_- + n_- - m_+ - n_+), \\ \frac{m}{n} = \frac{m_-}{n_-}, m < m_-, n < n_-, \mu < u_-. \end{cases} \quad (5)$$

在投影的相平面 $(u, m+n)$ 中, 1 - 稀疏波 R_1 和 3 - 激波 S_3 分别以正 u 轴和负 u 轴作为渐近线, 因此, 可以分别构造如下 4 种不同结构的黎曼解: $S_1 + J_2 + S_3$, $R_1 + J_2 + S_3$, $S_1 + J_2 + R_3$ 和 $R_1 + J_2 + R_3$ 。

2 同族 3 - 激波的相互作用

本节研究分别从初始点 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 0)$ 发出的两个 3 - 激波的相互作用。为达到这一研究目的, 考虑方程组(1) 取初始条件(3) 并且需要对初始数据(3) 做一些严格的限制, 以保证在初始点 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 0)$ 的局部黎曼解都只是一个 3 - 激波。也就是, 如果常状态 (m_-, n_-, μ_-) 和 (m_*, n_*, μ_*) 之间以及 (m_*, n_*, μ_*) 和 (m_+, n_+, μ_+) 之间都仅由单个 3 - 激波连接, 则需对初始条件(3) 作出如下具体的限制:

$$H_1: u_* = u_- - \sqrt{\frac{A}{n_- (m_* + n_*)}} (m_- + n_- - m_* - n_*) \quad \frac{m_*}{n_*} = \frac{m_-}{n_-}, m_- > m_*, n_- > n_*, \mu_- > u_*,$$

$$H_2: u_+ = u_* - \sqrt{\frac{A}{n_* (m_+ + n_+)}} (m_* + n_* - m_+ - n_+) \quad \frac{m_*}{n_*} = \frac{m_+}{n_+}, m_* > m_+, n_* > n_+, \mu_* > u_+.$$

比较分别从初始点 $(x_1, 0)$ 和 $(x_2, 0)$ 发出的两个 3 - 激波的传播速度, 见图 1, 可以得出, 波的相互作用将在有限时间内发生。具体的相互作用结果将通过特征分析法详细给出。此外, 引入符号 $S_3 \bar{S}_3 \rightarrow \bar{R}_1 + \bar{S}_3$ 表示两个 3 - 激波的相互作用结果。

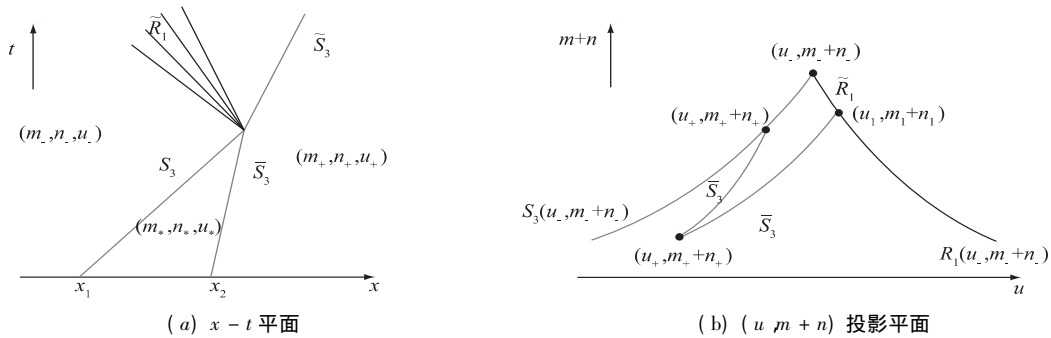


图 1 S_3 和 \bar{S}_3 的相互作用情况

Fig. 1 The interaction of S_3 and \bar{S}_3

定理 1 从初始点 $(x_1, 0)$ 发出的 3 - 激波 S_3 在有限时间内追赶上从初始点 $(x_2, 0)$ 发出的 3 - 激波 \bar{S}_3 , 并发生相互作用; S_3 和 \bar{S}_3 相互作用产生新的 1 - 稀疏波 \bar{R}_1 和 3 - 激波 \bar{S}_3 , 但不会产生新的 2 - 接触间断 \bar{J}_2 。

证明 首先 H_1 和 H_2 可改写为

$$\begin{cases} u_* = u_- - \sqrt{\frac{A(m_- + n_-)}{n_-}} \frac{(m_- + n_-) - (m_* + n_*)}{\sqrt{(m_- + n_-)(m_* + n_*)}}, \\ u_+ = u_* - \sqrt{\frac{A(m_+ + n_+)}{n_*}} \frac{(m_* + n_*) - (m_+ + n_+)}{\sqrt{(m_+ + n_+)(m_* + n_*)}}, \\ \frac{m_- + n_-}{n_-} = \frac{m_* + n_*}{n_*} = \frac{m_+ + n_+}{n_+}. \end{cases} \quad (6)$$

为了方便起见,令 $\mu = (u_- - u_+) \sqrt{\frac{n_-}{A(m_- + n_-)}}$, 显然 $\mu > 0$ 。从式(6)进一步得出:

$$\mu = \frac{(m_- + n_-) - (m_* + n_*)}{\sqrt{(m_- + n_-)(m_* + n_*)}} + \frac{(m_* + n_*) - (m_+ + n_+)}{\sqrt{(m_+ + n_+)(m_* + n_*)}} =$$

$$\left(\sqrt{\frac{1}{m_+ + n_+}} - \sqrt{\frac{1}{m_- + n_-}} \right) \sqrt{m_* + n_*} + \left(\sqrt{m_- + n_-} - \sqrt{m_+ + n_+} \right) \frac{1}{\sqrt{m_* + n_*}}, \quad (7)$$

由式(7)可以得到

$$\left(\sqrt{\frac{1}{m_+ + n_+}} - \sqrt{\frac{1}{m_- + n_-}} \right) (m_* + n_*) - \mu \sqrt{m_* + n_*} + \sqrt{m_- + n_-} - \sqrt{m_+ + n_+} = 0。$$

注意到, $\sqrt{m_* + n_*} > 0$, 那么有

$$\sqrt{m_* + n_*} = \frac{\mu \sqrt{(m_+ + n_+)(m_- + n_-)}}{2(\sqrt{m_- + n_-} - \sqrt{m_+ + n_+})} \pm$$

$$\sqrt{\left(\frac{\mu \sqrt{(m_+ + n_+)(m_- + n_-)}}{2(\sqrt{m_- + n_-} - \sqrt{m_+ + n_+})} \right)^2 - \sqrt{(m_+ + n_+)(m_- + n_-)}}。 \quad (8)$$

再次分析式(7) 显然有 $\mu \geq \frac{2(\sqrt{m_- + n_-} - \sqrt{m_+ + n_+})}{\sqrt{(m_+ + n_+)(m_- + n_-)}^{\frac{1}{2}}}$ 当且仅当 $m_* + n_* = \sqrt{(m_+ + n_+)(m_- + n_-)}$ 时等

号成立。将其代入式(8), 可以推出 $m_* + n_*$ 是存在的 进而根据式(6) μ_* 也存在。将 μ 代入式(8), 得到

$$m_* + n_* = \left(\frac{(u_- - u_+) \sqrt{n_- (m_+ + n_+)}}{2\sqrt{A}(\sqrt{m_- + n_-} - \sqrt{m_+ + n_+})} \pm \sqrt{\frac{(u_- - u_+)^2 n_- (m_+ + n_+)}{4A(\sqrt{m_- + n_-} - \sqrt{m_+ + n_+})^2} - \sqrt{(m_+ + n_+)(m_- + n_-)}} \right)^2。$$

接下来, 对激波 S_3 和 \bar{S}_3 分别应用经典 Lax 熵条件, 可得 $\lambda_2(m_*, n_*, \mu_*) < \bar{\sigma}_3 < \lambda_3(m_*, n_*, \mu_*) < \sigma_3 < \lambda_3(m_-, n_-, \mu_-)$ 其中 $\bar{\sigma}_3$ 和 σ_3 分别表示激波 \bar{S}_3 和 S_3 的传播速度。由图1(a) 可以看到, 激波 S_3 在有限时间内追上激波 \bar{S}_3 , 并在交点 (\bar{x}, \bar{t}) 处发生相互作用。其中, 交点 (\bar{x}, \bar{t}) 满足

$$\begin{cases} \bar{x} = x_1 + \sigma_3 \bar{t} = x_1 + \frac{(m_* + n_*) u_* - (m_- + n_-) u_-}{(m_* + n_*) - (m_- + n_-)} \bar{t}, \\ \bar{x} = x_2 + \bar{\sigma}_3 \bar{t} = x_2 + \frac{(m_+ + n_+) u_+ - (m_* + n_*) u_*}{(m_+ + n_+) - (m_* + n_*)} \bar{t}. \end{cases}$$

随后, 对于给定的左状态 (m_-, n_-, μ_-) 和右状态 (m_+, n_+, μ_+) , 在点 (\bar{x}, \bar{t}) 处形成一个新的黎曼问题。基于以上讨论, 有必要证明上述两个激波 S_3 和 \bar{S}_3 相互作用后, 投影右状态 (u_+, m_+, n_+) 位于投影平面 $(u, m+n)$ 内的曲线 $S_3(u_-, m_- + n_-)$ 和 $R_1(u_-, m_- + n_-)$ 的下方。为此, 如果有

$$\bar{u} = u_- + \sqrt{\frac{A(m_- + n_-)}{n_-}} \ln \left(\frac{m_- + n_-}{m_+ + n_+} \right), \quad (9)$$

那么投影状态 $(\bar{u}, m_+ + n_+)$ 位于投影平面 $(u, m+n)$ 内的1-稀疏波曲线 $R_1(u_-, m_- + n_-)$ 上。也就是说, 两个常状态 (m_-, n_-, μ_-) 和 $(m_+, n_+, \bar{\mu})$ 通常由一个1-稀疏波伴随着一个2-接触间断连接起来。此外, 如果有

$$\bar{\bar{u}} = u_- - \sqrt{\frac{A}{n_- (m_+ + n_+)}} (m_- + n_- - m_+ - n_+), \quad (10)$$

那么投影状态 $(\bar{\bar{u}}, m_+ + n_+)$ 位于投影平面 $(u, m+n)$ 内的3-激波曲线 $S_3(u_-, m_- + n_-)$ 上。也就是说, 两个常状态 (m_-, n_-, μ_-) 和 $(m_+, n_+, \bar{\bar{\mu}})$ 通常由一个2-接触间断伴随着一个3-激波连接起来。

基于上述两种假设, 从图1(b) 中观察到, 如果 $\bar{u} < u_+ < \bar{\bar{u}}$ 则投影右状态 (u_+, m_+, n_+) 位于投影平面 $(u, m+n)$ 内的曲线 $S_3(u_-, m_- + n_-)$ 和 $R_1(u_-, m_- + n_-)$ 的下方。下面对此展开具体分析: 从式(6) 可得 $u_+ < u_* < u_-$, 然后考虑式(9) 明显有 $u_+ < \bar{u}$; 此外, 通过式(6)、(10) 可以发现 $\bar{\bar{\mu}} < u_+$ 成立等价于不等式

$$\sqrt{\frac{A}{n_-(m_+ + n_+)}} \cdot |m_- + n_- - m_+ - n_+| > \sqrt{\frac{A(m_- + n_-)}{n_-}} \left(\frac{m_- + n_- - m_* - n_*}{\sqrt{(m_- + n_-)(m_* + n_*)}} + \frac{m_* + n_* - m_+ - n_+}{\sqrt{(m_+ + n_+)(m_* + n_*)}} \right) \quad (11)$$

成立。令 $x = m_* + n_*$ 式(11)的右端可看作关于 x 的函数 $f(x)$, 即

$$f(x) = \left(\sqrt{\frac{1}{m_+ + n_+}} - \sqrt{\frac{1}{m_- + n_-}} \right) \sqrt{x} + \left(\sqrt{m_- + n_-} - \sqrt{m_+ + n_+} \right) \frac{1}{\sqrt{x}}$$

其中 $x \in (m_+ + n_+, m_- + n_-)$ 。注意到 $f(x)$ 是以 $y = \left(\sqrt{\frac{1}{m_+ + n_+}} - \sqrt{\frac{1}{m_- + n_-}} \right) \sqrt{x}$ 和 $x = 0$ 为渐近线的双曲线, 且开口向上, 那么 $f(x)$ 在 $m_+ + n_+$ 或 $m_- + n_-$ 处取得最大值, 即 $f(m_* + n_*) < f(m_+ + n_+) = f(m_- + n_-)$, 由此证得不等式(11)成立。

综上, 投影右状态 $(u_+, m_+ + n_+)$ 位于 $(u, m + n)$ 投影平面内的曲线 $S_3(u_-, m_- + n_-)$ 和 $R_1(u_-, m_-, n_-)$ 的下方, 说明 S_3 和 \bar{S}_3 相互作用产生新的 1 - 稀疏波、2 - 接触间断和 3 - 激波, 记为 $\bar{R}_1 + \bar{J}_2 + \bar{S}_3$ 。用 (m_1, n_1, μ_1) 和 (m_2, n_2, μ_2) 分别表示 \bar{R}_1, \bar{J}_2 和 \bar{S}_3 之间的两个中间状态。由 1 - 稀疏波 $R_1(m_-, n_-, \mu_-)$ 和式(5)可以推得 $\frac{m_-}{n_-} = \frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_+}{n_+}$ 。进一步考虑式(6)的最后一个方程, 推得 $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$ 。另外, 假设中间态 (m_1, n_1, μ_1) 和 (m_2, n_2, μ_2) 由 2 - 接触间断 \bar{J}_2 连接, 则根据式(4), \bar{J}_2 应满足 $m_1 + n_1 = m_2 + n_2, \mu_1 = \mu_2$ 。总之, 有 $(m_1, n_1, \mu_1) = (m_2, n_2, \mu_2)$ 成立, 表明: S_3 和 \bar{S}_3 相互作用后 2 - 接触间断 \bar{J}_2 不再存在。为方便起见, \bar{R}_1 和 \bar{S}_3 之间的中间状态仍取为 (m_1, n_1, μ_1) , 它满足以下形式:

$$\begin{cases} \frac{m_-}{n_-} = \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_+}{n_+}, \\ u_1 = u_- + \sqrt{\frac{A(m_- + n_-)}{n_-}} \ln\left(\frac{m_- + n_-}{m_1 + n_1}\right), \\ u_+ = u_1 - \sqrt{\frac{A}{n_-(m_1 + n_1)}}(m_1 + n_1 - m_+ - n_+), \end{cases} \quad (12)$$

其中, $n_+ < n_1 < n_-$, $m_+ < m_1 < m_-$, 且 $u_+ < u_- < u_1$ 。

接下来讨论 $m_1 + n_1$ 的唯一性。将式(12)的最后一个方程改写为 $u_+ = u_1 - \sqrt{\frac{A(m_- + n_-)}{n_-}} \frac{m_1 + n_1 - m_+ - n_+}{\sqrt{(m_1 + n_1)(m_+ + n_+)}}$, 并与式(12)的第二个方程联立, 可得

$$\mu = \sqrt{\frac{m_1 + n_1}{m_+ + n_+}} - \sqrt{\frac{m_+ + n_+}{m_1 + n_1}} - \ln\left(\frac{m_- + n_-}{m_1 + n_1}\right) \quad (13)$$

那么, 式(13)的右端可看作关于变量 $m_1 + n_1$ 的函数 $g(m_1 + n_1)$, 求导得

$$g'(m_1 + n_1) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{1}{(m_+ + n_+)(m_1 + n_1)}} + \sqrt{\frac{m_+ + n_+}{(m_1 + n_1)^3}} \right) + \frac{1}{m_1 + n_1} > 0.$$

因此, $g(m_1 + n_1)$ 是关于 $m_1 + n_1$ 单调递增的函数, 表明 $m_1 + n_1$ 是唯一的, 进而得到 u_1 也是唯一的。此外, 图 1 很好地说明了 3 - 激波 S_3 和 \bar{S}_3 的相互作用情况, 证毕。

3 结语

本文研究了等温的二相液气模型同族 3 - 激波的相互作用问题, 严格证明了其相互作用后产生一个新的 1 - 稀疏波和一个新的 3 - 激波。在后续工作中, 将利用本文方法研究其他类型间断波的相互作用问题, 包括 1 - 激波分别与 1 - 激波、2 - 接触间断以及 3 - 激波的相互作用问题。

参考文献:

- [1] EVJE S, FLATTEN T. On the wave structure of two – phase flow models [J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics* 2007, 67(2): 487 – 511.
- [2] EVJE S. Weak solutions for a gas – liquid model relevant for describing gas – kick in oil wells [J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 2011 43(4): 1887 – 1922.
- [3] FLATTEN T, MUNKEJORD S T. The approximate Riemann solver of Roe applied to a drift – flux two – phase flow model [J]. *ESAIM Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 2006 40(4): 735 – 764.
- [4] LORENTZEN R J, FJELDE K K. Use of slope limiter techniques in traditional numerical methods for multi – phase flow in pipelines and wells [J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 2005 48(7): 723 – 745.
- [5] HUANG F M, WANG D H, YUAN D F. Nonlinear stability and existence of vortex sheets for inviscid liquid – gas two – phase flow [J]. *Discrete and Continuous Dynamical Systems* 2019 39(6): 3535 – 3575.
- [6] RUAN L Z, WANG D H, WENG S K et al. Rectilinear vortex sheets of inviscid liquid – gas two – phase flow: linear stability [J]. *Communications in Mathematical Sciences* 2016 14(3): 735 – 776.
- [7] SHEN C. The singular limits of solutions to the Riemann problem for the liquid – gas two – phase isentropic flow model [J]. *Journal of Mathematical Physics* 2020 61(8): 081502.
- [8] SEKHAR T R, SHARMA V D. Riemann problem and elementary wave interactions in isentropic magnetogasdynamics [J]. *Nonlinear Analysis Real World Applications* 2010 11(2): 619 – 636.
- [9] SEN A, SEKHAR T R, SHARMA V D. Wave interactions and stability of the Riemann solution for a strictly hyperbolic system of conservation laws [J]. *Quarterly of Applied Mathematics* 2017 75(3): 539 – 554.
- [10] SMOLLER J. Shock waves and reaction – diffusion equations [M]. New York: Springer – Verlag, 1994.
- [11] CHANG T, HSIAO L. The Riemann problem and interaction of waves in gas dynamics [M]. Essex: Longman Scientific & Technical, 1989.
- [12] SEKHAR T R, SHARMA V D. Riemann problem and elementary wave interactions in isentropic magnetogasdynamics [J]. *Nonlinear Analysis Real World Applications* 2010 11(2): 619 – 636.
- [13] MINHAJUL I, ZEIDAN D, SEKHAR T R. On the wave interactions in the drift – flux equations of two – phase flows [J]. *Applied Mathematics & Computation* 2018 327: 117 – 131.
- [14] KUILA S, SEKHAR T R. Interaction of weak shocks in drift – flux model of compressible two – phase flows [J]. *Chaos Solitons & Fractals* 2018 107: 222 – 227.

Interaction Between Shock Waves of the Same Family for a Inviscid Two – phase Liquid – gas Model of Isothermal Flow

ZHANG Shuai, SHEN Chun

(School of Mathematics and Statistics Science, Ludong University, Yantai 264039, China)

Abstract: The interaction between 3 – shock waves of the same family for a inviscid two – phase liquid – gas model of isothermal flow was discussed by the method of characteristic analysis. It is shown in detail that the interaction between 3 – shock waves of the same family results in a new 1 – rarefaction wave and a new 3 – shock wave.

Keywords: wave interaction; characteristic analysis; two – phase flow

(责任编辑 顾建忠)