鲁东大学学报(自然科学版)
Journal of Ludong University(Natural Science Edition) 2022,38(4):329—336

不确定分数阶广义大系统的非脆弱分散控制器设计与仿真

杨冬梅,孙义兵

(东北大学 理学院,沈阳 110819)

摘要: 本文针对阶次 $0 < \alpha < 1$ 的不确定分数阶广义大系统,提出一种适用较大范围的非脆弱分散控制器的设计方法。基于对广义大系统特殊结构的分析,分别在加法和乘法控制器增益扰动下,利用矩阵不等式方法,推导出闭环系统容许的充分条件,设计了非脆弱分散控制器,并通过数值仿真说明该方法的有效性。

关键词: 分数阶; 广义大系统; 容许性; 非脆弱控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-8020(2022)04-0329-08

分数阶系统可以很好地描述现实世界中许多物理系统和自然现象,例如电磁感应、量子力学和神经网络等[1—3]。广义系统既包含微分方程又包含代数方程,与正常系统相比更具有一般性[4]。分数阶广义系统理论被广泛应用于捕食系统[5]、Logistic 映射系统[6]和电路系统[7]等。对于阶次 $0 < \alpha < 1$ 的分数阶广义系统,文献[8—9]以严格线性矩阵不等式的形式给出其容许的充要条件,有效降低了计算的复杂度,得到保守性较低的控制器设计方法。文献[10—12]分别研究了分数阶广义系统的滑模控制、H_∞ 控制和预测控制问题。

以上研究成果主要采用集中控制方案,由于信息结构上固有的非经典约束,使得集中化的设计有很大局限性,所以大系统分散控制问题有一定研究意义。在工程应用中,被控对象很难用标称的系统模型来准确刻画,不确定系统更能反应系统的实际情况,同时系统鲁棒稳定性的研究变得更加复杂,使控制器设计的难度增加。采用传统方法设计控制器时,只需要找到控制器增益,即可使闭环系统保持稳定。但控制器对自身的微小变化非常敏感,非脆弱控制的思想就是设计对控制器增益的扰动不敏感的反馈控制[13]。文献[14—17]分别研究分数阶大系统的自适应模糊控制、弹性容错控制、非脆弱控制以及分散观测器的设计问题。文献[18]针对各个子系统维数都相同的不确定分数阶大系统,利用李雅普诺夫不等式设计了分散控制器。

目前关于分数阶广义大系统的研究成果较少。本文针对不确定分数阶广义大系统,研究其非脆弱分散控制问题。通过对大系统特殊结构的分析,利用矩阵不等式方法,分别在控制器增益加法和乘法摄动下得到闭环系统容许的充分条件,给出了保守性较低的控制器设计方法。主要贡献归纳如下:

1) 针对不确定分数阶广义大系统设计了非脆弱分散控制器,允许控制器增益存在一定范围的摄动,所得结论以线性矩阵不等式的形式给出,便于求解。

2) 在控制器设计过程中,克服了对大系统中各个子系统维数的限制,与文献[18]相比,进一步扩大了控制器的适用范围,降低结论的保守性。

符号说明: M^* 表示矩阵 M 的共轭转置,$\bar{z}$ 表示复数 z 的共轭; $\mathrm{Re}(H)$,$\mathrm{Im}(H)$ 分别表示矩阵 H 的实部和虚部,j 是虚数单位; I 是具有适当维数的单位矩阵,$\mathrm{sym}\{M\}$ 表示 $M + M^{\mathrm{T}}$。

收稿日期: 2021-12-21; 修回日期: 2022-04-23

基金项目: 国家自然科学基金(61673100)

第一作者简介: 杨冬梅(1966—),女,辽宁沈阳人,教授,硕士研究生导师,博士,研究方向为广义系统。E-mail: yangdongmei@mail.neu.edu.cn

1 问题描述

考虑由 N 个子系统 $S_i(i=1,2,\cdots,N)$ 组成的不确定分数阶广义大系统，子系统 S_i 的系统方程为

$$E_i D^{\alpha} \boldsymbol{x}_i(t)=(\boldsymbol{A}_{ii}+\Delta \boldsymbol{A}_{ii})\boldsymbol{x}_i(t)+(\boldsymbol{B}_i+\Delta \boldsymbol{B}_i)\boldsymbol{u}_i(t)+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}(\boldsymbol{A}_{ij}+\Delta \boldsymbol{A}_{ij})\boldsymbol{x}_j(t), \tag{1}$$

其中：$\alpha\in\mathbf{R}$ 是分数阶的阶次，且 $0<\alpha<1$，$\boldsymbol{x}_i(t)\in\mathbf{R}^{n_i}$ 和 $\boldsymbol{u}_i(t)\in\mathbf{R}^{m_i}$ 分别是子系统 S_i 的状态向量和控制输入向量；矩阵 $\boldsymbol{E}_i\in\mathbf{R}^{n_i\times n_i}$ 是奇异的，且 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{E}_i)=q_i<n_i$；$\boldsymbol{A}_{ii}\in\mathbf{R}^{n_i\times n_i}$，$\boldsymbol{B}_i\in\mathbf{R}^{n_i\times m_i}$ 和 $\boldsymbol{A}_{ij}\in\mathbf{R}^{n_i\times n_j}$ 是具有适当维数的常量矩阵，$\boldsymbol{A}_{ij}\in\mathbf{R}^{n_i\times n_j}$ 表示子系统 S_j 到子系统 S_i 的关联矩阵；$\Delta\boldsymbol{A}_{ii}\in\mathbf{R}^{n_i\times n_i}$，$\Delta\boldsymbol{A}_{ij}\in\mathbf{R}^{n_i\times n_j}$，$\Delta\boldsymbol{B}_i\in\mathbf{R}^{n_i\times m_i}$ 为不确定项，且具有如下一般结构：

$$[\Delta\boldsymbol{A}_{ii}\quad \Delta\boldsymbol{B}_i]=\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}ii}\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}ii}[\boldsymbol{G}_{\mathrm{a}ii}\quad \boldsymbol{G}_{\mathrm{b}ii}],\Delta\boldsymbol{A}_{ij}=\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}ij}\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}ij}\boldsymbol{G}_{\mathrm{a}ij},$$

这里：$\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}ii}$，$\boldsymbol{G}_{\mathrm{a}ii}$，$\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}ij}$，$\boldsymbol{G}_{\mathrm{a}ij}$ 和 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{b}ii}$ 均为常量矩阵；$\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}ii}$ 和 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}ij}$ 为未知矩阵，满足 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}ii}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}ii}\leqslant I$，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}ij}\leqslant I$。系统(1)中的 D^{α} 表示如下 Caputo 微分：

$$D^{\alpha}y(t)=\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^t\frac{y^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}}\mathrm{d}\tau,$$

其中：$m\in\mathbf{Z}$，$m-1<\alpha<m$。对于每个子系统，采用如下非脆弱分散控制器：

$$\boldsymbol{u}_i(t)=(\boldsymbol{K}_i+\Delta\boldsymbol{K}_i)\boldsymbol{x}_i(t),i=1,2,\cdots,N, \tag{2}$$

其中，$\boldsymbol{K}_i$ 为待设计的控制器增益，$\Delta\boldsymbol{K}_i$ 为增益的摄动。考虑如下两种形式的摄动：

1) 加法摄动：

$$\Delta\boldsymbol{K}_i=\boldsymbol{D}_{1i}\boldsymbol{F}_{1i}\boldsymbol{G}_{1i}, \tag{3}$$

2) 乘法摄动：

$$\Delta\boldsymbol{K}_i=\boldsymbol{D}_{2i}\boldsymbol{F}_{2i}\boldsymbol{G}_{2i}\boldsymbol{K}_i, \tag{4}$$

其中：$\boldsymbol{D}_{1i}$，$\boldsymbol{D}_{2i}$，$\boldsymbol{G}_{1i}$，$\boldsymbol{G}_{2i}$ 为已知常量矩阵；$\boldsymbol{F}_{1i}$ 和 $\boldsymbol{F}_{2i}$ 为未知扰动矩阵，满足 $\boldsymbol{F}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{1i}\leqslant\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{F}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{2i}\leqslant\boldsymbol{I}$。

本文控制目的：对于不确定分数阶广义大系统(1)，分别在控制器增益加法和乘法摄动下，研究非脆弱分散控制器(2)存在的充分条件，推导出控制器的设计方法，使得闭环系统容许。

2 加法摄动下控制器设计

为了研究控制器增益具有形如式(3)的加法摄动时，非脆弱分散控制器存在的充分条件，需给出下面的定义和引理。

定义 1 [8-9] 考虑分数阶广义系统 $ED^{\alpha}\boldsymbol{x}(t)=A\boldsymbol{x}(t)$ 或矩阵对$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})$，

(1) 若存在 $s\in\mathbf{C}$ 使得 $\det(s^{\alpha}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\neq 0$ 成立，则称系统是正则的；

(2) 若 $\deg(\det(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}))=\operatorname{rank}(\boldsymbol{E})$，其中 $\lambda\in\mathbf{C}$，则称系统是无脉冲的；

(3) 若 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 的全部有限特征值满足 $|\arg(\lambda)|>\alpha\pi/2$，则称系统是稳定的；

(4) 若系统是正则、稳定且无脉冲的，则称其是容许的。

引理 1 [19] 对于复厄尔米特矩阵 $\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{H}<0$ 当且仅当 $\begin{bmatrix}\operatorname{Re}(\boldsymbol{H}) & \operatorname{Im}(\boldsymbol{H})\\ -\operatorname{Im}(\boldsymbol{H}) & \operatorname{Re}(\boldsymbol{H})\end{bmatrix}<0$。

引理 2 [15] 对于任意正数 $\beta>0$，以及适当维数的矩阵 $\boldsymbol{X}$ 和 $\boldsymbol{Y}$，如下不等式成立：

$$\operatorname{sym}\{\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}\}\leqslant\beta\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}+\beta^{-1}\boldsymbol{Y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}。$$

引理 3 [20] 对于给定的对称矩阵 $\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{11} & \boldsymbol{Q}_{12}\\ \boldsymbol{Q}_{12}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Q}_{22}\end{bmatrix}$，其中 $\boldsymbol{Q}_{11}$ 是 $l\times l$ 维的，以下三个条件是等价的：

(1) $\boldsymbol{Q}<0$；(2) $\boldsymbol{Q}_{11}<0$，$\boldsymbol{Q}_{22}-\boldsymbol{Q}_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}_{11}^{-1}\boldsymbol{Q}_{12}<0$；(3) $\boldsymbol{Q}_{22}<0$，$\boldsymbol{Q}_{11}-\boldsymbol{Q}_{12}\boldsymbol{Q}_{22}^{-1}\boldsymbol{Q}_{12}^{\mathrm{T}}<0$。

引理 4 [8-9] 若 $0<\alpha<1$，系统 $\boldsymbol{E}D^{\alpha}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$ 是容许的，当且仅当存在矩阵 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}^{*}>0$，$\boldsymbol{X}\in$

$\mathbf{C}^{n\times n}$ 和 $S\in\mathbf{R}^{(n-q)\times n}$，使得

$$\operatorname{sym}\{A[rX+\bar{r}\bar{X})E^{\mathrm{T}}+E_0S]\}<0,$$

其中：$A\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$E\in\mathbf{R}^{n\times n}$，$\operatorname{rank}(E)=q<n$；$E_0\in\mathbf{R}^{n\times(n-q)}$ 是满足 $EE_0=0$ 的列满秩矩阵，$r=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$，$\theta=(1-\alpha)\pi/2$。

定理 1　对于不确定分数阶广义大系统(1)，在形如式(3)的控制器增益加法摄动下，如果存在矩阵 $X_i\in\mathbf{C}^{n_i\times n_i}$，$X_i=X_i^*>0$，$S_i\in\mathbf{R}^{(n_i-q_i)\times n_i}$，$Y_i\in\mathbf{R}^{m_i\times n_i}$，以及正数 α_i，β_i，γ_{ij}，δ_i 和 ε_{ij}，使得对所有的 $i,j=1,2,\cdots,N(j\neq i)$，矩阵 $P_i=2(\cos\theta X_{1i}-\sin\theta X_{2i})E_i^{\mathrm{T}}+E_{0i}S_i$ 可逆，且如下线性矩阵不等式组成立

$$\begin{bmatrix}
\Sigma_{1i} & Y_{1i} & P_i^{\mathrm{T}}G_{1i}^{\mathrm{T}} & P_i^{\mathrm{T}}G_{1i}^{\mathrm{T}} & P_i^{\mathrm{T}} & \cdots & P_i^{\mathrm{T}} & P_i^{\mathrm{T}} & \cdots & P_i^{\mathrm{T}} & P_i^{\mathrm{T}}\tilde{G}_i\\
* & \Psi_{1i} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
* & * & -\delta_iI & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
* & * & * & -\alpha_iI & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
* & * & * & * & -\varepsilon_{1i}I & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
* & * & * & * & * & \cdots & -\varepsilon_{(i-1)i}I & 0 & \cdots & 0 & 0\\
* & * & * & * & * & \cdots & * & -\varepsilon_{(i+1)i}I & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
* & * & * & * & * & \cdots & * & * & \cdots & -\varepsilon_{Ni}I & 0\\
* & * & * & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & -\tilde{\gamma}
\end{bmatrix}<0, \tag{5}$$

$$\begin{bmatrix} X_{1i} & X_{2i}\\ -X_{2i} & X_{1i}\end{bmatrix}>0, \tag{6}$$

其中：$\Sigma_{1i}=P_i^{\mathrm{T}}A_{ii}^{\mathrm{T}}+A_{ii}P_i+Y_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}+B_iY_i+\beta_iD_{\mathrm{a}ii}D_{\mathrm{a}ii}^{\mathrm{T}}+\alpha_iB_iD_{1i}D_{1i}^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}}+\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{N}(\varepsilon_{ij}A_{ij}A_{ij}^{\mathrm{T}}+\gamma_{ij}D_{\mathrm{a}ij}D_{\mathrm{a}ij}^{\mathrm{T}})$，$Y_{1i}=P_i^{\mathrm{T}}G_{\mathrm{a}ii}^{\mathrm{T}}+Y_i^{\mathrm{T}}G_{\mathrm{b}ii}^{\mathrm{T}}$，$\Psi_{1i}=-\beta_iI+\delta_iG_{\mathrm{b}ii}D_{1i}D_{1i}^{\mathrm{T}}G_{\mathrm{b}ii}^{\mathrm{T}}$，$\tilde{G}_i=[G_{\mathrm{a}1i}^{\mathrm{T}}\ \cdots\ G_{\mathrm{a}(i-1)i}^{\mathrm{T}}\ G_{\mathrm{a}(i+1)i}^{\mathrm{T}}\ \cdots\ G_{\mathrm{a}Ni}^{\mathrm{T}}]$，$\tilde{\gamma}=\operatorname{diag}[\gamma_{1i}I,\cdots,\gamma_{(i-1)i}I,\gamma_{(i+1)i}I,\cdots,\gamma_{Ni}I]$，$\theta=(1-\alpha)\pi/2$，$X_{1i}$ 和 X_{2i} 分别是矩阵 X_i 的实部和虚部，$E_{0i}\in\mathbf{R}^{n_i\times(n_i-q_i)}$ 是满足 $E_iE_{0i}=0$ 的列满秩矩阵。那么，不确定分数阶广义大系统(1)在控制器(2)作用下容许，此时 $K_i=Y_iP_i^{-1}$ 为非脆弱分散控制器增益。

证明　不确定分数阶广义大系统(1)在控制律(2)作用下所得闭环系统为

$$E_iD^{\alpha}x_i(t)=[(A_{ii}+\Delta A_{ii})+(B_i+\Delta B_i)(K_i+\Delta K_i)]x_i(t)+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}(A_{ij}+\Delta A_{ij})x_j(t), \tag{7}$$

其紧凑形式为

$$ED^{\alpha}x(t)=[(A+\Delta A)+(B+\Delta B)(K+\Delta K)]x(t), \tag{8}$$

其中

$$x(t)=[x_1^{\mathrm{T}}\ \ x_2^{\mathrm{T}}\ \ \cdots\ \ x_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n,n=\sum_{i=1}^{N}n_i;u(t)=[u_1^{\mathrm{T}}\ \ u_2^{\mathrm{T}}\ \ \cdots\ \ u_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^m,m=\sum_{i=1}^{N}m_i;$$

$$E=\operatorname{diag}[E_1,E_2,\cdots,E_N]\in\mathbf{R}^{n\times n};$$

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{N1} & A_{N2} & \cdots & A_{NN}\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{n\times n},\Delta A=\begin{bmatrix}\Delta A_{11} & \Delta A_{12} & \cdots & \Delta A_{1N}\\ \Delta A_{21} & \Delta A_{22} & \cdots & \Delta A_{2N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \Delta A_{N1} & \Delta A_{N2} & \cdots & \Delta A_{NN}\end{bmatrix}\in\mathbf{R}^{n\times n};$$

$$B=\operatorname{diag}[B_1,B_2,\cdots,B_N]\in\mathbf{R}^{n\times m},\Delta B=\operatorname{diag}[\Delta B_1,\Delta B_2,\cdots,\Delta B_N]\in\mathbf{R}^{n\times m};$$

$$K=\operatorname{diag}[K_1,K_2,\cdots,K_N]\in\mathbf{R}^{m\times n},\Delta K=\operatorname{diag}[\Delta K_1,\Delta K_2,\cdots,\Delta K_N]\in\mathbf{R}^{m\times n}。$$

由引理 4，闭环系统(8)容许的充要条件是以下矩阵不等式成立

$$\mathrm{sym}\{[\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K})][(r\boldsymbol{X}+\bar{r}\bar{\boldsymbol{X}})\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{S}]\}<0,\tag{9}$$

其中: $r=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$, $\theta=(1-\alpha)\pi/2$, $q=\sum_{i=1}^{N}q_i$, $\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}[\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\cdots,\boldsymbol{X}_N]$, $\boldsymbol{E}_0=\mathrm{diag}[\boldsymbol{E}_{01},\boldsymbol{E}_{02},\cdots,\boldsymbol{E}_{0N}]\in\mathbf{R}^{n\times(n-q)}$, $\boldsymbol{S}=\mathrm{diag}[\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2,\cdots,\boldsymbol{S}_N]\in\mathbf{R}^{(n-q)\times n}$。不等式(9)成立只需

$$\boldsymbol{\xi}^*\{\mathrm{sym}\{[\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K})][(r\boldsymbol{X}+\bar{r}\bar{\boldsymbol{X}})\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{S}]\}\}\boldsymbol{\xi}<0,\tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}=[\boldsymbol{\xi}_1^*\quad\boldsymbol{\xi}_2^*\quad\cdots\quad\boldsymbol{\xi}_N^*]^*$, $\boldsymbol{\xi}_i$ 是具有适当维数的非零复列向量。令 $\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}[\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_N]$, $\boldsymbol{P}_i=(r\boldsymbol{X}_i+\bar{r}\bar{\boldsymbol{X}}_i)\boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}_{0i}\boldsymbol{S}_i$, 则有

$$\mathrm{sym}\{(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})[(r\boldsymbol{X}+\bar{r}\bar{\boldsymbol{X}})\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{S}]\}=$$
$$\mathrm{sym}\left\{\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{P}_1+\Delta\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{P}_2+\Delta\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{P}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_{1N}\boldsymbol{P}_N+\Delta\boldsymbol{A}_{1N}\boldsymbol{P}_N\\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{P}_1+\Delta\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{P}_2+\Delta\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{P}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_{2N}\boldsymbol{P}_N+\Delta\boldsymbol{A}_{2N}\boldsymbol{P}_N\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{N1}\boldsymbol{P}_1+\Delta\boldsymbol{A}_{N1}\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{A}_{N2}\boldsymbol{P}_2+\Delta\boldsymbol{A}_{N2}\boldsymbol{P}_2 & \cdots & \boldsymbol{A}_{NN}\boldsymbol{P}_N+\Delta\boldsymbol{A}_{NN}\boldsymbol{P}_N\end{bmatrix}\right\},\tag{11}$$

$$\mathrm{sym}\{[(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})(\boldsymbol{K}+\Delta\boldsymbol{K})][(r\boldsymbol{X}+\bar{r}\bar{\boldsymbol{X}})\boldsymbol{E}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{E}_0\boldsymbol{S}]\}=$$
$$\mathrm{sym}\left\{\begin{bmatrix}(\boldsymbol{B}_1+\Delta\boldsymbol{B}_1)(\boldsymbol{K}_1+\Delta\boldsymbol{K}_1)\boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & (\boldsymbol{B}_2+\Delta\boldsymbol{B}_2)(\boldsymbol{K}_2+\Delta\boldsymbol{K}_2)\boldsymbol{P}_2 & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & (\boldsymbol{B}_N+\Delta\boldsymbol{B}_N)(\boldsymbol{K}_N+\Delta\boldsymbol{K}_N)\boldsymbol{P}_N\end{bmatrix}\right\}。\tag{12}$$

根据式(11)和(12),不等式(10)可改写为

$$\sum_{i=1}^{N}\{\boldsymbol{\xi}_i^*\{\mathrm{sym}\{(\boldsymbol{A}_{ii}+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i+\boldsymbol{B}_i\Delta\boldsymbol{K}_i)\boldsymbol{P}_i+(\Delta\boldsymbol{A}_{ii}+\Delta\boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{K}_i+\Delta\boldsymbol{K}_i))\boldsymbol{P}_i\}\}\boldsymbol{\xi}_i+$$
$$\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\boldsymbol{\xi}_i^*(\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{P}_j+\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{ji}^{\mathrm{T}}+\Delta\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{P}_j+\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{A}_{ji}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\xi}_j\}<0。\tag{13}$$

令 $\boldsymbol{Y}_i=\boldsymbol{K}_i\boldsymbol{P}_i$, 利用引理2对式(13)中各项进行放大处理:

$$\begin{aligned}&\mathrm{sym}\{(\boldsymbol{A}_{ii}+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{K}_i+\boldsymbol{B}_i\Delta\boldsymbol{K}_i)\boldsymbol{P}_i+(\Delta\boldsymbol{A}_{ii}+\Delta\boldsymbol{B}_i(\boldsymbol{K}_i+\Delta\boldsymbol{K}_i))\boldsymbol{P}_i\}=\\&\mathrm{sym}\{\boldsymbol{A}_{ii}\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{Y}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{D}_{1i}\boldsymbol{F}_{1i}\boldsymbol{G}_{1i}\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}ii}\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}ii}(\boldsymbol{G}_{\mathrm{a}ii}+\boldsymbol{G}_{\mathrm{b}ii}(\boldsymbol{K}_i+\Delta\boldsymbol{K}_i))\boldsymbol{P}_i\}\leqslant\\&\mathrm{sym}\{\boldsymbol{A}_{ii}\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{Y}_i\}+\alpha_i\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{D}_{1i}\boldsymbol{D}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}+\alpha_i^{-1}\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{1i}\boldsymbol{P}_i+\beta_i\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}ii}\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}ii}^{\mathrm{T}}+\\&\beta_i^{-1}\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{G}_{\mathrm{a}ii}+\boldsymbol{G}_{\mathrm{b}ii}(\boldsymbol{K}_i+\Delta\boldsymbol{K}_i))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{G}_{\mathrm{a}ii}+\boldsymbol{G}_{\mathrm{b}ii}(\boldsymbol{K}_i+\Delta\boldsymbol{K}_i))\boldsymbol{P}_i,\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\boldsymbol{\xi}_i^*(\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{P}_j+\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{ji}^{\mathrm{T}}+\Delta\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{P}_j+\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{A}_{ji}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{\xi}_j=\\&\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}(\boldsymbol{\xi}_i^*\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{\xi}_j+\boldsymbol{\xi}_j^*\boldsymbol{P}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_i+\boldsymbol{\xi}_i^*\Delta\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{\xi}_j+\boldsymbol{\xi}_j^*\boldsymbol{P}_j^{\mathrm{T}}\Delta\boldsymbol{A}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_i)\leqslant\\&\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i,j\neq i}^{N}(\varepsilon_{ij}\boldsymbol{\xi}_i^*\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_i+\varepsilon_{ij}^{-1}\boldsymbol{\xi}_j^*\boldsymbol{P}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{\xi}_j+\gamma_{ij}\boldsymbol{\xi}_i^*\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}ij}\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_i+\gamma_{ij}^{-1}\boldsymbol{\xi}_j^*\boldsymbol{P}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{a}ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{a}ij}\boldsymbol{P}_j\boldsymbol{\xi}_j)=\\&\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1,j\neq i}^{N}\boldsymbol{\xi}_i^*(\varepsilon_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}^{\mathrm{T}}+\varepsilon_{ji}^{-1}\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i+\gamma_{ij}\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}ij}\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}ij}^{\mathrm{T}}+\gamma_{ji}^{-1}\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{a}ji}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{a}ji}\boldsymbol{P}_i)\boldsymbol{\xi}_i,\end{aligned}\tag{15}$$

将不等式(14)和(15)代入不等式(13),得到以下矩阵不等式:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N}\Big\{\boldsymbol{\xi}_i^*\Big\{\mathrm{sym}\{\boldsymbol{A}_{ii}\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{Y}_i\}+\alpha_i\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{D}_{1i}\boldsymbol{D}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}+\beta_i^{-1}\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{G}_{\mathrm{a}ii}+\boldsymbol{G}_{\mathrm{b}ii}(\boldsymbol{K}_i+\Delta\boldsymbol{K}_i))^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{G}_{\mathrm{a}ii}+\boldsymbol{G}_{\mathrm{b}ii}(\boldsymbol{K}_i+\Delta\boldsymbol{K}_i))\boldsymbol{P}_i+\\&\alpha_i^{-1}\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{1i}\boldsymbol{P}_i+\beta_i\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}ii}\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}ii}^{\mathrm{T}}+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}(\varepsilon_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}^{\mathrm{T}}+\varepsilon_{ji}^{-1}\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_i+\gamma_{ij}\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}ij}\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}ij}^{\mathrm{T}}+\gamma_{ji}^{-1}\boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{a}ji}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{a}ji}\boldsymbol{P}_i)\Big\}\boldsymbol{\xi}_i\Big\}<0。\end{aligned}\tag{16}$$

若不等式(16)成立,则在控制器增益加法摄动下的不确定分数阶广义大系统是容许的。下面记

$$\sum\nolimits_{1i}=\mathrm{sym}\{\boldsymbol{A}_{ii}\boldsymbol{P}_i+\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{Y}_i\}+\alpha_i\boldsymbol{B}_i\boldsymbol{D}_{1i}\boldsymbol{D}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}}+\beta_i\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}ii}\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}ii}^{\mathrm{T}}+\sum_{j=1,j\neq i}^{N}(\varepsilon_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}\boldsymbol{A}_{ij}^{\mathrm{T}}+\gamma_{ij}\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}ij}\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}ij}^{\mathrm{T}}),$$

$$\prod\nolimits_{1i} = \sum\nolimits_{1i} + \alpha_i^{-1} \boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G}_{1i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G}_{1i} \boldsymbol{P}_i + \sum_{j=1, j \neq i}^{N} (\varepsilon_{ji}^{-1} \boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{P}_i + \gamma_{ji}^{-1} \boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G}_{\mathrm{a}ji}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G}_{\mathrm{a}ji} \boldsymbol{P}_i) ,$$

利用引理 3,要使不等式(16) 成立,需

$$\begin{bmatrix} \prod_{1i} & * \\ (\boldsymbol{G}_{\mathrm{a}ii} + \boldsymbol{G}_{\mathrm{b}ii} (\boldsymbol{K}_i + \Delta \boldsymbol{K}_i)) \boldsymbol{P}_i & -\beta_i \boldsymbol{I} \end{bmatrix} < 0 。 \tag{17}$$

由引理 2,将不等式(17) 左端通过如下方式处理:

$$\begin{bmatrix} \prod_{1i} & * \\ \boldsymbol{G}_{\mathrm{a}ii} \boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{G}_{\mathrm{b}ii} \boldsymbol{Y}_i & -\beta_i I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & * \\ \boldsymbol{G}_{\mathrm{b}ii} \boldsymbol{D}_{1i} \boldsymbol{F}_{1i} \boldsymbol{G}_{1i} \boldsymbol{P}_i & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \prod_{1i} & * \\ \boldsymbol{G}_{\mathrm{a}ii} \boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{G}_{\mathrm{b}ii} \boldsymbol{Y}_i & -\beta_i I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{G}_{\mathrm{b}ii} \boldsymbol{D}_{1i} \end{bmatrix} \boldsymbol{F}_{1i} [\boldsymbol{G}_{1i} \boldsymbol{P}_i \quad \boldsymbol{0}] + \left(\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{G}_{\mathrm{b}ii} \boldsymbol{D}_{1i} \end{bmatrix} \boldsymbol{F}_{1i} [\boldsymbol{G}_{1i} \boldsymbol{P}_i \quad \boldsymbol{0}] \right)^{\mathrm{T}} \leqslant$$

$$\begin{bmatrix} \prod_{1i} + \delta_i^{-1} \boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G}_{1i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G}_{1i} \boldsymbol{P}_i & * \\ \boldsymbol{G}_{\mathrm{a}ii} \boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{G}_{\mathrm{b}ii} \boldsymbol{Y}_i & -\beta_i \boldsymbol{I} + \delta_i \boldsymbol{G}_{\mathrm{b}ii} \boldsymbol{D}_{1i} \boldsymbol{D}_{1i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G}_{\mathrm{b}ii}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} ,$$

因此,要使不等式(16) 成立,只需

$$\begin{bmatrix} \prod_{1i} + \delta_i^{-1} \boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G}_{1i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G}_{1i} \boldsymbol{P}_i & * \\ \boldsymbol{G}_{\mathrm{a}ii} \boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{G}_{\mathrm{b}ii} \boldsymbol{Y}_i & -\beta_i \boldsymbol{I} + \delta_i \boldsymbol{G}_{\mathrm{b}ii} \boldsymbol{D}_{1i} \boldsymbol{D}_{1i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G}_{\mathrm{b}ii}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} < 0 。 \tag{18}$$

由引理 3 可知,不等式(18) 等价于不等式(5) ,由于 X_{1i},X_{2i} 分别是矩阵 X_i 的实部和虚部,根据引理 1 可知,不等式(6) 需成立,且 $rX_i + \bar{r}\bar{X}_i = 2(\cos \theta X_{1i} - \sin \theta X_{2i})$,因此 $\boldsymbol{P}_i = 2(\cos \theta \boldsymbol{X}_{1i} - \sin \theta \boldsymbol{X}_{2i}) \boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{E}_{0i} \boldsymbol{S}_i$。由此可知,不等式(5) 是一个线性实矩阵不等式,且 $\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{Y}_i (2(\cos \theta \boldsymbol{X}_{1i} - \sin \theta \boldsymbol{X}_{2i}) \boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{E}_{0i} \boldsymbol{S}_i)^{-1}$ 为所求的控制器增益。

3　乘法摄动下的控制器设计

定理 2　对于不确定分数阶广义大系统(1) ,在形如式(4) 的控制器增益乘法摄动下,如果存在矩阵 $\boldsymbol{X}_i \in \mathbf{C}^{n_i \times n_i}$,$\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{X}_i^* > 0$,$\boldsymbol{S}_i \in \mathbf{R}^{(n_i - q_i) \times n_i}$,$\boldsymbol{Y}_i \in \mathbf{R}^{m_i \times n_i}$,以及正数 α_i,β_i,γ_{ij},δ_i 和 ε_{ij},使得对所有的 i,$j = 1,2,\cdots,N(j \neq i)$,矩阵 $\boldsymbol{P}_i = 2(\cos \theta \boldsymbol{X}_{1i} - \sin \theta \boldsymbol{X}_{2i}) \boldsymbol{E}_i^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{E}_{0i} \boldsymbol{S}_i$ 可逆,且不等式(6) 以及如下线性矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix} \sum_{2i} & \boldsymbol{Y}_{2i} & \boldsymbol{Y}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G}_{2i}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Y}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G}_{2i}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}} \tilde{\boldsymbol{G}}_i \\ * & \boldsymbol{\Psi}_{2i} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & * & -\delta_i \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & -\alpha_i \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & * & -\varepsilon_{1i} \boldsymbol{I} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & * & \cdots & -\varepsilon_{(i-1)i} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & * & * & \cdots & * & -\varepsilon_{(i+1)i} \boldsymbol{I} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & * & * & \cdots & * & * & \cdots & -\varepsilon_{Ni} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ * & * & * & * & * & \cdots & * & * & \cdots & * & -\tilde{\boldsymbol{\gamma}} \end{bmatrix} < 0 ,$$

其中: $\sum_{2i} = \boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A}_{ii}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{A}_{ii} \boldsymbol{P}_i + \boldsymbol{Y}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{Y}_i + \beta_i \boldsymbol{D}_{\mathrm{a}ii} \boldsymbol{D}_{\mathrm{a}ii}^{\mathrm{T}} + \alpha_i \boldsymbol{B}_i \boldsymbol{D}_{2i} \boldsymbol{D}_{2i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B}_i^{\mathrm{T}} + \sum_{j=1, j \neq i}^{N} (\varepsilon_{ij} \boldsymbol{A}_{ij} \boldsymbol{A}_{ij}^{\mathrm{T}} + \gamma_{ij} \boldsymbol{D}_{\mathrm{a}ij} \boldsymbol{D}_{\mathrm{a}ij}^{\mathrm{T}})$,$\boldsymbol{Y}_{2i} = \boldsymbol{P}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G}_{\mathrm{a}ii}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Y}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G}_{\mathrm{b}ii}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\Psi}_{2i} = -\beta_i \boldsymbol{I} + \delta_i \boldsymbol{G}_{\mathrm{b}ii} \boldsymbol{D}_{2i} \boldsymbol{D}_{2i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G}_{\mathrm{b}ii}^{\mathrm{T}}$,$\tilde{\boldsymbol{G}}_i = [\boldsymbol{G}_{\mathrm{a}1i}^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{G}_{\mathrm{a}(i-1)i}^{\mathrm{T}} \quad \boldsymbol{G}_{\mathrm{a}(i+1)i}^{\mathrm{T}} \quad \cdots \quad \boldsymbol{G}_{\mathrm{a}Ni}^{\mathrm{T}}]$,$\tilde{\boldsymbol{\gamma}} = \mathrm{diag}[\gamma_{1i} \boldsymbol{I}, \cdots, \gamma_{(i-1)i} \boldsymbol{I}, \gamma_{(i+1)i} \boldsymbol{I}, \cdots, \gamma_{Ni} \boldsymbol{I}]$,$\theta = (1 - \alpha) \pi / 2$,$X_{1i}$ 和 X_{2i} 分别是矩阵 X_i 的实部和虚部,$\boldsymbol{E}_{0i} \in$

$\mathbf{R}^{n_i\times(n_i-q_i)}$ 是满足 $E_iE_{0i}=0$ 的列满秩矩阵。那么,不确定分数阶广义大系统(1)在控制器(2)作用下容许,此时 $K_i=Y_iP_i^{-1}$ 为非脆弱分散控制器增益。

证明 由于证明过程与定理 1 类似,故此处略去。

4 数值仿真

考虑由两个子系统组成的不确定分数阶广义大系统,其中:

$$\boldsymbol{x}_1(t)=[x_{11}(t)\quad x_{12}(t)]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}_2(t)=[x_{21}(t)\quad x_{22}(t)\quad x_{23}(t)]^{\mathrm{T}},\alpha=0.8,$$

$$\boldsymbol{A}_{11}=\begin{bmatrix}-3&4\\2&2\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_{12}=\begin{bmatrix}0.5&0.2&0.1\\0.2&0.5&1\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_{21}=\begin{bmatrix}0.2&0.1\\0.3&0.1\\0.2&0.2\end{bmatrix},\boldsymbol{A}_{22}=\begin{bmatrix}1&2&1\\-0.2&1&0.5\\0.5&0.2&1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}11}=\begin{bmatrix}0.4&0.2\\1&0.3\end{bmatrix},\boldsymbol{G}_{\mathrm{a}11}=\begin{bmatrix}0.4&0.2\\1&0.3\end{bmatrix},\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}12}=\begin{bmatrix}0.5&0.2&0.1\\0.3&0.2&0.1\end{bmatrix},\boldsymbol{G}_{\mathrm{a}12}=\begin{bmatrix}0.3&0.2&0.2\\0.5&0.2&0.3\\0.2&0.3&0.1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}21}=\begin{bmatrix}0.5&0.2\\0.3&0.1\\0.1&0.2\end{bmatrix},\boldsymbol{G}_{\mathrm{a}21}=\begin{bmatrix}0.4&0.3\\0.2&0.1\end{bmatrix},\boldsymbol{D}_{\mathrm{a}22}=\begin{bmatrix}0.4&0.2&0.2\\1&0.3&0.2\\0.2&0.3&0.1\end{bmatrix},\boldsymbol{G}_{\mathrm{a}22}=\begin{bmatrix}0.3&0.5&0.2\\0.1&0.5&0.3\\0.2&0.4&0.1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{b}11}=\begin{bmatrix}0.5\\0.3\end{bmatrix},\boldsymbol{G}_{\mathrm{b}22}=\begin{bmatrix}0.2&0.1\\0.3&0.4\\0.3&0.1\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}0.5\\1\end{bmatrix},\boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}0.5&0\\0&0.5\\1&0.2\end{bmatrix},$$

选取 $\boldsymbol{E}_{01}=[0\quad 1]^{\mathrm{T}},\boldsymbol{E}_{02}=[0\quad 0\quad 1]^{\mathrm{T}}$,满足 $\boldsymbol{E}_i\boldsymbol{E}_{0i}=0(i=1,2)$。

当控制器增益具有加法型摄动时,选取

$$\boldsymbol{D}_{11}=[1.5\quad 1],\boldsymbol{G}_{11}=\begin{bmatrix}0.1&0.2\\1&0.8\end{bmatrix},\boldsymbol{D}_{12}=\begin{bmatrix}0.5&0&0.1\\0&0.2&0\end{bmatrix},\boldsymbol{G}_{12}=\begin{bmatrix}0.2&0&0\\0&0.1&0\\0&0&0.3\end{bmatrix},$$

由定理 1,得到局部状态反馈增益矩阵为

$$\boldsymbol{K}_1=[17.002\,0\quad 33.263\,2],\boldsymbol{K}_2=\begin{bmatrix}-207.897\,8&4.515\,0&-0.791\,6\\140.654\,3&50.502\,1&3.065\,1\end{bmatrix}。$$

当控制器增益具有乘法型摄动时,选取

$$\boldsymbol{D}_{21}=[-1\quad -0.2],\boldsymbol{G}_{21}=\begin{bmatrix}0.1\\-0.1\end{bmatrix},\boldsymbol{D}_{22}=\begin{bmatrix}0.5&0&0.1\\0&0.2&0\end{bmatrix},\boldsymbol{G}_{22}=\begin{bmatrix}0.2&0&0.1\\0&0.1&0.2\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

由定理 2,得到局部状态反馈增益矩阵为

$$\boldsymbol{K}_1=[-1.346\,2\quad 6.345\,6],$$

$$\boldsymbol{K}_2=\begin{bmatrix}-251.817\,2&-1.970\,4&-0.763\,4\\184.913\,1&45.655\,0&2.138\,2\end{bmatrix}。$$

选取系统扰动矩阵为 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}11}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}12}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}21}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}22}=\sin(\pi/3)\boldsymbol{I}$。利用 SIMULINK 进行仿真,开环系统的状态响应如图 1 所示。由图 1 可见,未施加控制的系统是不稳定的。

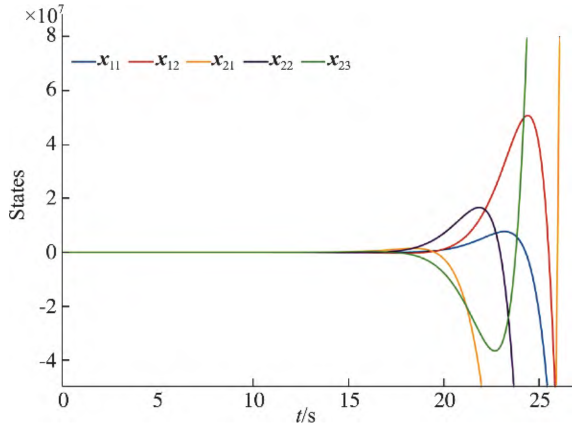

图 1 开环系统的状态响应

Fig.1 State responses of open-loop system

选取控制器增益扰动矩阵为 $\boldsymbol{F}_{11}=\boldsymbol{F}_{12}=\boldsymbol{F}_{21}=\boldsymbol{F}_{22}=\sin(\pi/3)\boldsymbol{I}$,可得闭环系统都是正则的。在控制器增益加法摄动下,系统的初始条件设定为:

$$\boldsymbol{x}_1(0)=[10\quad -5.7]^{\mathrm{T}},$$

$$x_2(0) = [0.2 \quad -0.5 \quad 7.2]^{\mathrm{T}},$$

闭环系统的状态响应如图 2 所示;在控制器增益乘法摄动下,系统的初始条件设定为:$x_1(0) = [11 \quad -1.4]^{\mathrm{T}}$,$x_2(0) = [0.25 \quad -0.47 \quad 6.98]^{\mathrm{T}}$,闭环系统的状态响应如图 3 所示。由图 2 ~ 3 可以得到,不确定分数阶广义大系统在非脆弱控制器作用下达到控制目标,即闭环系统是容许的。

注 1:本文的设计方案允许系统参数和控制器增益矩阵存在一定范围的扰动,只要未知矩阵 $\boldsymbol{F}_{1i}$,$\boldsymbol{F}_{2i}$,$\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}ii}$ 和 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}ij}$ 满足 $\boldsymbol{F}_{1i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{1i} \leqslant \boldsymbol{I}$,$\boldsymbol{F}_{2i}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{2i} \leqslant \boldsymbol{I}$,$\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}ii}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}ii} \leqslant \boldsymbol{I}$,$\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}ij}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{a}ij} \leqslant \boldsymbol{I}$,所设计的控制器可以保证系统(1)容许。

注 2:文献[18]针对正常分数阶大系统设计了非脆弱分散控制器,但该控制方法需要较强的限制条件,即关联矩阵 $\boldsymbol{A}_{ij} \in \mathbf{R}^{n_i \times n_i}$ 为方阵,这导致所设计的控制器仅适用于各个子系统维数都相同的情况。本文的设计方案不要求 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 为方阵,根据数值仿真结果,当子系统维数不同时,闭环系统在控制器作用下是容许的。

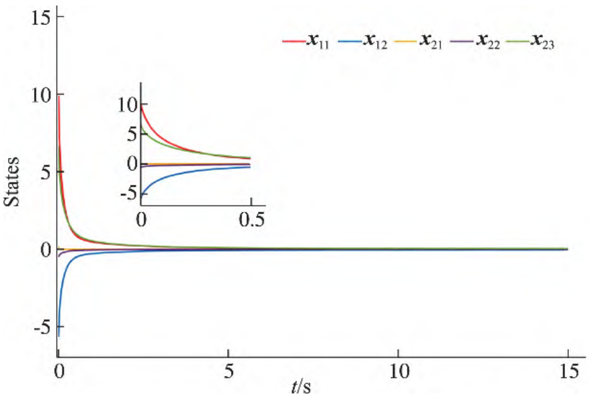

图 2　加法摄动下闭环系统的状态响应

Fig.2 State responses of closed-loop system under additive perturbations

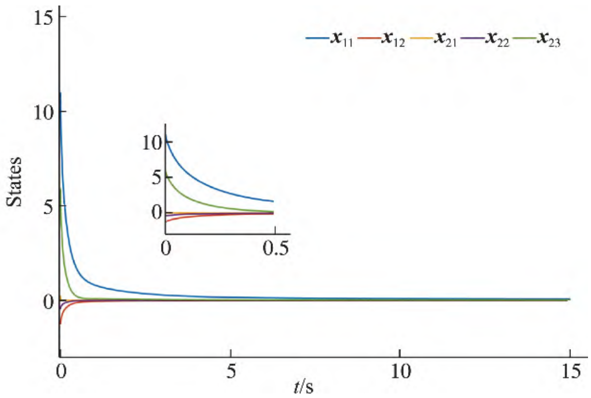

图 3　乘法摄动下闭环系统的状态响应

Fig.3 State responses of closed-loop system under multiplicative perturbations

5　结论

本文分别在控制器增益存在加法和乘法摄动下,为不确定分数阶广义大系统设计非脆弱分散控制器,解决系统存在不确定性以及控制器存在摄动的控制问题,并克服对子系统维数的限制。控制器的增益矩阵通过求解线性矩阵不等式得到,数值仿真验证了结果的有效性。接下来的工作是将本文的思想方法推广到其他阶次的分数阶广义大系统。

参考文献:

[1] MACHADO J A T,JESUS I S,GALHANO A,et al.Fractional order electromagnetics[J].Signal Processing,2006,86(10):2637-2644.

[2] LASKIN N.Fractional quantum mechanics and Lévy path integrals[J].Physics Letters A,2000,268:298-305.

[3] SABIR Z,RAJA M A Z,GUIRAO J L G,et al.A novel design of fractional Meyer wavelet neural networks with application to the nonlinear singular fractional Lane-Emden systems[J].Alexandria Engineering Journal,2021,60(2):2641-2659.

[4] MARIR S,CHADLI M.Robust admissibility and stabilization of uncertain singular fractional-order linear time-invariant systems[J].IEEE-CAA Journal of Automatica Sinica,2019,6(3):685-692.

[5] NOSRATI K,SHAFIEE M.Dynamic analysis of fractional-order singular Holling type-II predator-prey system[J].Applied Mathematics and Computation,2017,313:159-179.

[6] NOSRATI K,SHAFIEE M.Fractional-order singular logistic map:stability,bifurcation and chaos analysis[J].Chaos,Solitons and Fractals,2018,115:224-238.

[7] ZHANG Q,SHANG Y L,CUI N X,et al.A novel fractional variable-order equivalent circuit model and parameter identifica-

tion of electric vehicle Li-ion batteries [J].ISA Transactions,2020,97:448-457.

[8] ZHANG X F,CHEN Y Q.Admissibility and robust stabilization of continuous linear singular fractional-order systems with the fractional order α: the $0<\alpha<1$ case [J].ISA Transactions,2017,82:42-50.

[9] ZHAN T,MA S P.The controller design for singular fractional-order systems with fractional order $0<\alpha<1$ [J].The ANZIAM Journal,2018,60(2):230-248.

[10] MENG B,WANG X,ZHANG Z,et al.Necessary and sufficient conditions for normalization and sliding mode control of singular fractional-order systems with uncertainties [J].Science China Information Sciences,2020,63(5):1-10.

[11] ZHANG Q H,LU J G.H_∞ control for singular fractional-order interval systems: the $0<\alpha<1$ case [J].ISA Transactions,2021,110:105-116.

[12] 赵宝佳,刘晓华,高荣.一类不确定分数阶广义系统的鲁棒预测控制[J].鲁东大学学报(自然科学版),2021,37(4):298-302.

[13] YANG Y,HE Y.Non-fragile observer-based robust control for uncertain systems via aperiodically intermittent control [J].Information Sciences,2021,573(12):239-261.

[14] ZHAN Y L,SUI S,TONG S C.Adaptive fuzzy decentralised control for fractional-order interconnected nonlinear systems with input saturation [J].International Journal of Systems Science,2021,52(13):2689-2703.

[15] NITHYA V,SAKTHIVEL R,ALZAHRANI F,et al.Decentralized fault-tolerant resilient control for fractional-order interconnected systems with input saturation [J].International Journal of Control,Automation and Systems,2019(6):1-11.

[16] CHEN F Z,LU J G,MIAO Y B.Decentralized robust controller design for fractional order interconnected systems with element-bounded uncertainties [C]//Proceedings of the 29th Chinese Control and Decision Conference,2017.

[17] BOUKAL Y,DAROUACH M,ZASADZINSKI M,et al.Large-scale fractional-order systems: stability analysis and their decentralized functional observers design [J].IET Control Theory & Applications,2018,12(3):359-367.

[18] LIN J Y.Robust resilient controller synthesis for uncertain fractional-order large-scale interconnected system [J].Journal of the Franklin Institute,2014,351(3):1630-1643.

[19] MARIR S,CHADLI M,BASIN M V.Bounded real lemma for singular linear continuous-time fractional-order systems [J].Automatica,2022,135:1-9.

[20] QI F,CHAI Y,CHEN L,et al.Passivity-based non-fragile control of a class of uncertain fractional-order nonlinear systems [J].Integration,the VLSI Journal,2021(6):25-33.

Non-fragile Decentralized Controller Design and Simulation for Uncertain Fractional-order Singular Large-scale Systems

YANG Dongmei, SUN Yibing

(School of Science,Northeastern University,Shenyang 110819,China)

Abstract: In this paper,a design method of non-fragile decentralized controllers for uncertain fractional-order singular large-scale systems with commensurate order $0<\alpha<1$ was proposed.Based on analysis of the special structure of large-scale systems,under additive and multiplicative disturbances of controller gains,sufficient conditions for the existence of non-fragile decentralized controllers and their design methods of uncertain fractional-order singular large-scale systems were given by using Linear Matrix Inequalities.The effectiveness of the conclusions was illustrated by numerical simulation.

Keywords: fractional-order; singular large-scale systems; admissibility; non-fragile control; Linear Matrix Inequality

(责任编辑　顾建忠)