

具有多源干扰的线性系统固定时间抗干扰控制

高飞,魏新江

(鲁东大学 数学与统计科学学院,山东 烟台 264039)

摘要:本文研究了具有多源干扰的线性系统的固定时间抗干扰问题,提出一种基于干扰观测器的固定时间控制策略。该策略不仅使闭环系统达到全局固定时间稳定,而且提高了抗干扰控制的性能。最后,通过数值算例验证了所提出控制策略的可行性。

关键词:多源干扰;基于干扰观测器控制;固定时间控制;全局固定时间稳定

中图分类号:TP273 **文献标志码:**A **文章编号:**1673-8020(2023)01-0050-06

实际工程中存在着广泛的干扰,这些干扰会影响系统性能,甚至导致系统不稳定。因此,抗干扰控制成为控制领域一个重要的研究方向,并包含许多抗干扰控制方法,例如自抗扰控制^[1]、自适应控制^[2]、基于干扰观测器控制(disturbance observer-based control, DOBC)^[3-5]和滑模控制^[6]等。

DOBC 在上世纪 80 年代末提出,已成功应用于许多工程领域^[7-9],具有控制精度高,易与其他控制策略相结合等优势。近年来,通过将 DOBC 和其他控制策略相结合,提出了复合抗干扰控制策略,该控制策略可以充分利用干扰信息,达到更好的抗干扰效果。目前,DOBC 策略主要是在无穷时间条件下实现预期的控制目标,忽略了时间因素对系统的影响。有限时间控制因收敛速度快、精度高以及更好的抗干扰能力^[10-11],受到越来越多的关注,在机器人系统^[12]、航天器系统^[13]、多智能体系统^[14]等领域有广泛的应用。

然而,有限时间控制中的收敛时间依赖于初始状态,即对于不同的初始状态,收敛时间不同。而在实际工程中,初始条件可能是不确定的,甚至是未知的,这给有限时间控制的应用带来极大不便。为解决这个问题,文献[15]首次提出固定时间稳定,要求系统是全局有限时间稳定的,并且收敛时间与系统初始状态无关。在文献[15]的基础上,固定时间控制得到进一步发展。文献[16]利用隐式 Lyapunov 函数方法实现了系统的固定时间稳定;文献[17]提出新的固定时间输出反馈控制方案,解决了受未知外部干扰和不确定性因素影响的海面船舶的轨迹跟踪问题。此外,由于实际背景要求,许多系统往往需要固定时间稳定,如飞行器系统^[18]、多智能体系统^[19]、电力系统^[20]等。

基于上述讨论,本文针对具有多源干扰的线性系统,提出一种基于干扰观测器的固定时间控制策略。创新点列举如下:1) 通过将 DOBC 和固定时间控制结合,所提出的固定时间控制策略不仅使闭环系统达到全局固定时间稳定,而且提高了收敛速度和系统的抗干扰能力;2) 时间函数的上界由独立于系统初始状态的正常数来限定,这克服了有限时间控制对初始条件的依赖,进一步提高抗干扰控制的精度。

1 预备知识和问题描述

1.1 预备知识

考虑如下系统:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), x(0) = x_0, \quad (1)$$

收稿日期:2021-10-24;修回日期:2022-10-11

基金项目:国家自然科学基金(61973149);山东省自然科学基金(ZR2020KF029)

通信作者简介:魏新江(1977—),男,教授,硕士研究生导师,博士,研究方向为非线性系统控制、鲁棒控制等。E-mail:weixinjiang@163.com

其中, $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ 表示状态。如果 $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ 是不连续向量函数, 则系统(1) 的解为菲利波夫意义下的解^[21-22]。

定义 1^[15] 如果系统(1) 是全球有限时间稳定的, 且对于任意初始状态 \mathbf{x}_0 , 收敛时间 $T(\mathbf{x}_0)$ 是有界的, 即对于任意初始状态 $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$, 有 $T(\mathbf{x}_0) \leq T_{\max}$, T_{\max} 为正常数, 则称系统(1) 是全球固定时间稳定的。

引理 1^[15] 如果存在正则、正定、径向无界的函数 $V(\mathbf{x}(t))$, 满足下面不等式:

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) \leq -\alpha V^p(\mathbf{x}(t)) - \beta V^q(\mathbf{x}(t)),$$

其中, $\alpha, \beta > 0, 0 \leq p < 1, q > 1$, 则系统(1) 是固定时间稳定, 且收敛时间 $T(\mathbf{x}_0) \leq T_{\max} \triangleq \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{(1-p)} + \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{(q-1)}$ 。

引理 2^[19] 存在常数 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \geq 0$, 满足下面不等式:

$$(1) \text{ 当 } 0 < \sigma < 1 \text{ 时, } \sum_{i=1}^n \theta_i^\sigma \geq \left(\sum_{i=1}^n \theta_i \right)^\sigma; (2) \text{ 当 } \sigma > 1 \text{ 时, } \sum_{i=1}^n \theta_i^\sigma \geq n^{1-\sigma} \left(\sum_{i=1}^n \theta_i \right)^\sigma.$$

1.2 问题描述

本文考虑由下面微分方程描述的线性系统:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}(t) + \mathbf{d}(t) + \mathbf{F}\mathbf{d}_1(\mathbf{x}(t)), \quad (2)$$

其中: $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$ 是系统状态, $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^n$ 是控制输入, \mathbf{A}, \mathbf{F} 是系统矩阵, $\mathbf{d}_1(\mathbf{x}(t)) \in \mathbf{R}^n$ 表示未知有界干扰; $\mathbf{d}(t) \in \mathbf{R}^n$ 表示部分信息已知的干扰, 由下面外源系统产生

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{N}\boldsymbol{\eta}(t), \\ \mathbf{d}(t) = \mathbf{V}\boldsymbol{\eta}(t), \end{cases} \quad (3)$$

其中, $\boldsymbol{\eta}(t)$ 表示外源干扰状态, 矩阵 \mathbf{N} 和 \mathbf{V} 是已知矩阵。

假设 1 对于任意状态 $\mathbf{x}(t)$, 存在常数 $M > 0$, 干扰 $\mathbf{d}_1(\mathbf{x}(t))$ 满足: $\|\mathbf{d}_1(\mathbf{x}(t))\| \leq M$ 。

假设 2 系统(2)是能控的, 系统(3)是能观测的。

2 干扰观测器设计

根据系统(2), 定义如下虚拟干扰测量方程:

$$\mathbf{y}_d(t) = \dot{\mathbf{x}}(t) - [\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}\mathbf{d}_1(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{u}(t)]. \quad (4)$$

基于式(3)、(4), 可以得到

$$\begin{cases} \dot{\hat{\boldsymbol{\eta}}}(t) = \mathbf{N}\hat{\boldsymbol{\eta}}(t) + \mathbf{L}[\mathbf{y}_d(t) - \hat{\mathbf{d}}(t)], \\ \hat{\mathbf{d}}(t) = \mathbf{V}\hat{\boldsymbol{\eta}}(t). \end{cases} \quad (5)$$

定义中间变量 $\mathbf{s}(t) = \hat{\boldsymbol{\eta}}(t) - \mathbf{L}\mathbf{x}(t)$, 由式(4)、(5)可得到

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = (\mathbf{N} - \mathbf{L}\mathbf{V})[\mathbf{s}(t) + \mathbf{L}\mathbf{x}(t)] - \mathbf{L}[\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{F}\mathbf{d}_1(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{u}(t)],$$

最终得到干扰观测器:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{d}}(t) = \mathbf{V}\hat{\boldsymbol{\eta}}(t), \\ \hat{\boldsymbol{\eta}}(t) = \mathbf{s}(t) + \mathbf{L}\mathbf{x}(t), \end{cases} \quad (6)$$

其中, $\hat{\mathbf{d}}(t)$ 是 $\mathbf{d}(t)$ 的估计, \mathbf{L} 是观测增益矩阵。定义估计误差 $\mathbf{e}(t) = \boldsymbol{\eta}(t) - \hat{\boldsymbol{\eta}}(t)$, 通过式(2)、(3)、(6), 得到误差系统为 $\dot{\mathbf{e}}(t) = (\mathbf{W} - \mathbf{L}\mathbf{V})\mathbf{e}(t)$, 进而可得误差状态:

$$\mathbf{e}(t) = e^{(\mathbf{W}-\mathbf{L}\mathbf{V})t} \mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0 = \mathbf{e}(0). \quad (7)$$

由假设 2, 可通过极点配置选择合适的观测增益矩阵 \mathbf{L} , 使误差状态 $\mathbf{e}(t)$ 趋于平衡位置, 实现误差系统稳定。

3 主要结果

基于干扰观测器(6),设计如下控制器:

$$u(t) = Kx(t) - \hat{d}(t) - \alpha \operatorname{sgn}(x(t)) - \beta \operatorname{sgn}(x(t)) |x(t)|^q, \quad (8)$$

其中, $\alpha, \beta > 0, q > 1$ 为常数, K 为反馈增益矩阵。

将控制器(8)代入系统(2),得到闭环系统:

$$\dot{x}(t) = (A + K)x(t) + Fd_1(x(t)) + Ve(t) - \alpha \operatorname{sgn}(x(t)) - \beta \operatorname{sgn}(x(t)) |x(t)|^q. \quad (9)$$

定理 1 考虑具有干扰(3)的系统(2),如果存在正定对称矩阵 Q 和矩阵 R 满足:

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T + R + R^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

那么,闭环系统(9)是全局固定时间稳定,且 $K = RQ^{-1}$ 。

证明 定义

$$h(x(t)) = (A + K)x(t) + Fd_1(x(t)) + Ve(t) - \alpha \operatorname{sgn}(x(t)) - \beta \operatorname{sgn}(x(t)) |x(t)|^q.$$

构造 Lyapunov 函数 $V(x(t)) = x^T(t)Px(t)$, 其中 $P = Q^{-1}$ 。则 $V(x(t))$ 关于 $\Gamma[h]$ 的集值李导数^[21-22]为

$$L_h V(x(t)) = [\partial V(x(t))]^T \cdot \Gamma[h](x(t)) \subseteq 2x^T(t)P(A + K)x(t) + 2x^T(t)PFd_1(x(t)) + 2x^T(t)PVe(t) - 2\alpha x^T(t)PSGN(x(t)) - 2\beta x^T(t)P\operatorname{sgn}(x(t)) |x(t)|^q, \quad (11)$$

其中, $\Gamma[h] = (A + K)x(t) + Fd_1(x(t)) + Ve(t) - \alpha \operatorname{SGN}(x(t)) - \beta \operatorname{sgn}(x(t)) |x(t)|^q$,

$$\operatorname{SGN}(x(t)) = \begin{cases} -1, & x(t) < 0, \\ (-1, 1), & x(t) = 0, \\ 1, & x(t) > 0. \end{cases}$$

由式(11),可以得到

$$L_h V(x(t)) \leq 2x^T(t)P(A + K)x(t) + 2x^T(t)PFd_1(x(t)) + 2x^T(t)PVe(t) - 2\alpha \lambda_{\min}(P) \sum_{i=1}^n |x_i(t)| - 2\beta \lambda_{\min}(P) \sum_{i=1}^n |x_i(t)|^{q+1}. \quad (12)$$

由式(7)可得 $\|e(t)\| \leq \|e_0\|$, e_0 未知但有界,即存在 $J > 0$,使得 $\|e_0\| \leq J$ 。由引理 2,假设 1 和式(10)、(12),可得到

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &\leq -2(\alpha \lambda_{\min}(P) - \lambda_{\max}(P)(J \|V\| + M \|F\|)) \left(\sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \\ &\quad 2\beta \lambda_{\min}(P) n^{1-\frac{1+q}{2}} \left(\sum_{i=1}^n |x_i(t)|^2 \right)^{\frac{1+q}{2}}. \end{aligned}$$

令 $\alpha_1 = \frac{2(\alpha \lambda_{\min}(P) - \lambda_{\max}(P)(J \|V\| + M \|F\|))}{\frac{1}{2} \lambda_{\max}(P)} > 0$, $\beta_1 = \frac{2\beta \lambda_{\min}(P) n^{1-\frac{1+q}{2}}}{\frac{1+q}{2} \lambda_{\max}(P)} > 0$, 因此得到:

$$\dot{V}(x(t)) \leq -\alpha_1 V^{\frac{1}{2}}(x(t)) - \beta_1 V^{\frac{1+q}{2}}(x(t)).$$

由引理 1 可知,闭环系统(9)是固定时间稳定的,且收敛时间 $T(x_0)$ 的估计值为

$$T(x_0) \leq T_{\max} \triangleq \frac{1}{\alpha_1} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{\beta_1} \cdot \frac{1}{\left(\frac{1+q}{2} - 1\right)}. \quad (13)$$

4 仿真算例

为证明文中所提出控制策略的可行性,采用如下数值算例进行仿真验证。

考虑系统(2)和外源系统(3),系数矩阵分别取为:

$$A = \begin{bmatrix} -0.5 & 2 & 1 \\ 0.2 & 3 & 1 \\ 0.6 & 0 & -2 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.3 & -0.2 \\ -0.1 & 0.2 & 0 \\ -0.4 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}, N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

假设初始值 $\mathbf{x}(0) = [-4 \ 2 \ 4]^T$, 选取期望极点 $\mathbf{H} = [-20 \ -15 \ -18]^T$, 设计参数 $M = 0.3$, $J = 0.1, \alpha = 6.5, \beta = 5, q = 2$, 则观测增益矩阵和控制器增益矩阵分别为:

$$L = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 13 & 0 \\ -1 & 0 & 18 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0.000 0 & -0.938 3 & 0.427 7 \\ -1.261 7 & -3.500 0 & -0.384 3 \\ -2.027 7 & -0.615 7 & 1.500 0 \end{bmatrix},$$

估计时间 $T_{\max} = 0.480 7$ s, 仿真结果见图 1~3。图 1 是在两种不同控制策略下的仿真曲线,比较图 1(a)、(b)可以看到,本文所提出的控制策略具有更快的收敛速度。图 1(b)和图 2 是对应不同初始值的状态曲线,可以看到收敛时间上界与系统初始值无关。图 3 是干扰估计误差曲线,从图 3 可以看出,误差状态最终收敛到平衡点,表明干扰观测器可以有效估计干扰。

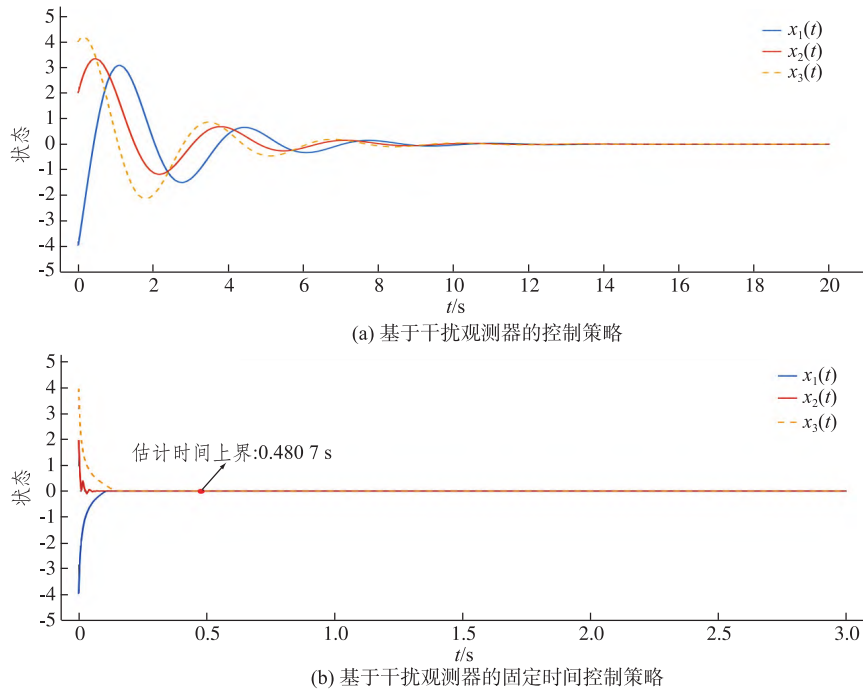


图 1 $\mathbf{x}(0) = [-4 \ 2 \ 4]^T$, 两种控制策略下的系统状态响应

Fig. 1 The responses of system states under two different control strategies with $\mathbf{x}(0) = [-4 \ 2 \ 4]^T$

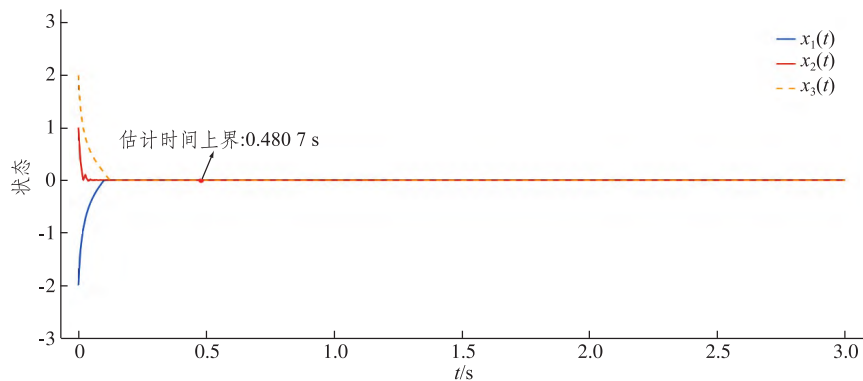


图 2 $\mathbf{x}(0) = [-2 \ 1 \ 2]^T$, 基于干扰观测器的固定时间控制策略下的系统状态响应

Fig. 2 The responses of system states under disturbance observer-based fixed-time control strategy with $\mathbf{x}(0) = [-2 \ 1 \ 2]^T$

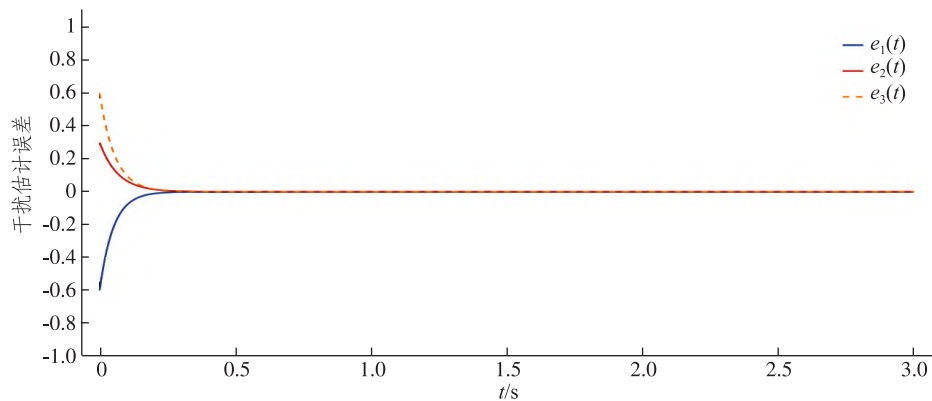


图 3 干扰估计误差曲线

Fig. 3 The curves of disturbance estimation errors

5 结语

本文考虑具有多源干扰的线性系统在固定时间内的抗干扰控制问题。通过将 DOBC 和固定时间控制结合,提出基于干扰观测器的固定时间控制策略。考虑到复杂环境中的干扰主要以多源异质的形式出现,即带有不同来源和不同干扰特性,今后的研究工作之一是在具有更加复杂干扰的情况下设计固定时间抗干扰控制方案。

参考文献:

- [1] WANG Y S, LIU J J, CHEN Z Q, et al. On the stability and convergence rate analysis for the nonlinear uncertain systems based upon active disturbance rejection control[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2020, 30(14): 5728 – 5750.
- [2] HU X, WEI X J, ZHANG H F, et al. Robust adaptive tracking control for a class of mechanical systems with unknown disturbances under actuator saturation[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2019, 29(6): 1893 – 1908.
- [3] GUO L, CHEN W H. Disturbance attenuation and rejection for systems with nonlinearity via DOBC approach[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2010, 15(3): 109 – 125.
- [4] 李新青, 魏新江. 一类随机系统基于自适应非线性干扰观测器的抗干扰控制[J]. *鲁东大学学报(自然科学版)*, 2020, 36(1): 9 – 16.
- [5] 由丽宏, 魏新江. 一类带有多源异质干扰的随机系统的精细抗干扰控制[J]. *鲁东大学学报(自然科学版)*, 2020, 36(2): 97 – 104.
- [6] RABIEE H, ATAIEI M, EKRAMIAN M. Continuous nonsingular terminal sliding mode control based on adaptive sliding mode disturbance observer for uncertain nonlinear systems[J/OL]. *Automatica*, 2019, 109: 108515 [2020 – 08 – 22]. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2019.108515>. DOI:10.1016/j.automatica.2019.108515.
- [7] MALLON N, NATHAN V D W, PUTRA D, et al. Friction compensation in a controlled one-link robot using a reduced-order observer[J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2006, 54(2): 374 – 383.
- [8] YANG J, LI S H, CHEN X S, et al. Disturbance rejection of ball mill grinding circuits using DOB and MPC[J]. *Powder Technology*, 2010, 198(2): 219 – 228.
- [9] RUBIO J J, OCHOA G, BALCAZAR R, et al. Uniform stable observer for the disturbance estimation in two renewable energy systems[J]. *ISA Transactions*, 2015, 58: 155 – 164.
- [10] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Finite-time stability of continuous autonomous systems[J]. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 2000, 38(3): 751 – 766.
- [11] 韩俊杰, 魏新江. 非线性系统的有限时间精细抗干扰控制[J]. *鲁东大学学报(自然科学版)*, 2021, 37(3): 193 – 199.
- [12] NA J, MAHYUDDIN M N, HERRMANN G, et al. Robust adaptive finite-time parameter estimation and control for robotic

- systems[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*,2015,25(16):3045–3071.
- [13] LU K F, XIA Y Q. Adaptive attitude tracking control for rigid spacecraft with finite-time convergence[J]. *Automatica*, 2013,49(12):3591–3599.
- [14] KHOO S, XIE L, ZHAO S, et al. Multi-surface sliding control for fast finite-time leader-follower consensus with high order SISO uncertain nonlinear agents[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*,2014,24(16):2388–2404.
- [15] POLYAKOV A. Nonlinear feedback design for fixed-time stabilization of linear control systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*,2012,57(8):2106–2110.
- [16] POLYAKOV A, EFIMOV D, PERRUQUETTI W. Finite-time and fixed-time stabilization: Implicit Lyapunov function approach[J]. *Automatica*,2015,51:332–340.
- [17] ZHANG J Q, YU S H, YAN Y. Fixed-time output feedback trajectory tracking control of marine surface vessels subject to unknown external disturbances and uncertainties[J]. *ISA Transactions*,2019,93:145–155.
- [18] ZHENG Z W, FEROSKHAN M, SUN L. Adaptive fixed-time trajectory tracking control of a stratospheric airship[J]. *ISA Transactions*,2018,76:134–144.
- [19] ZUO Z Y. Nonsingular fixed-time consensus tracking for second-order multi-agent networks[J]. *Automatica*,2015,54:305–309.
- [20] NI J K, LIU L, LIU C X, et al. Fast fixed-time nonsingular terminal sliding mode control and its application to chaos suppression in power system[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*,2017,64(2):151–155.
- [21] CORTES J. Finite-time convergent gradient flows with applications to network consensus[J]. *Automatica*,2006,42(11):1993–2000.
- [22] FORTI M, GRAZZINI M, NISTRÌ P, et al. Generalized Lyapunov approach for convergence of neural networks with discontinuous or non-Lipschitz activations[J]. *Physica D-Nonlinear Phenomena*,2006,214:88–99.

Fixed-time Anti-disturbance Control for Linear System with Multiple Disturbances

GAO Fei, WEI Xinjiang

(School of Mathematics and Statistics Science, Ludong University, Yantai 264039, China)

Abstract: The fixed-time anti-disturbance control problem is investigated for linear system with multiple disturbances. A disturbance observer-based fixed-time control strategy was proposed, which ensures the globally fixed-time stable of the closed-loop system and improves the performance of anti-disturbance control. Finally, a numerical example was given to demonstrate the feasibility of the proposed control strategy.

Keywords: multiple disturbances; disturbance observer-based control; fixed-time control; globally fixed-time stable

(责任编辑 顾建忠)