

基于差分隐格式的双层玻璃窗隔热问题分析

范葛贤,刘伟

(鲁东大学 数学与统计科学学院,山东 烟台 264039)

摘要:本文使用有限差分隐格式,对双层玻璃窗的隔热问题进行研究并数值模拟。分析双层玻璃窗结构,建立关于空间一维的热传导方程;根据热流密度相等给出内边界耦合条件、第一类左边界条件和第三类右边界条件;对模型方程离散化处理,采用有限差分隐格式进行数值模拟,并分析玻璃总厚度相同时单层玻璃窗的隔热情况。对比分析可知,在其他条件相同情况下,室外温度为 24.78 °C 时,带有厚度为 12 mm 空气夹层的双层玻璃窗的室内温度比单层玻璃窗低 5.41 °C。

关键词:双层玻璃窗;热传导方程;有限差分隐格式;数值计算

中图分类号:0241.82 **文献标志码:**A **文章编号:**1673-8020(2023)01-0056-07

双层玻璃窗一般是使用高强度高气密性的复合粘结剂,将两片玻璃和内部含有空气干燥剂的铝合金框架粘结制作而成,多应用于建筑方面。相较于单层玻璃窗,双层玻璃窗不仅能够较好地阻隔热量和声音的传播,还能减少电能的使用,这对加快推动绿色低碳发展、改善人们生活环境具有积极意义。

常见的抛物方程数值方法包含有限差分法、有限元法、有限体积法等。其中,有限差分法是常用的成熟有效的数值方法,在抛物问题中有着广泛的应用。文献[1—3]介绍和推导了热传导方程,对边界条件的提出作了一定说明;文献[4—5]对热传导方程更高精度的数值格式做了相关研究,研究内容表明有限差分法是处理传热问题的高效有用的数值方法;文献[6—8]针对抛物方程提出一种高精度数值格式,并对收敛性和稳定性进行分析。MATLAB 是数值模拟的重要工具,文献[9]对使用 MATLAB 求解热传导方程的有限元方法进行了研究;文献[10]对抛物方程的 MATLAB 求解算法和图像可视化做了相关介绍;文献[11]研究如何使用 MATLAB 编程解决有限差分问题,同时介绍了有限差分的数值格式。实际上,在一些复杂的热量传递问题中,一般很难给出问题的解析解,文献[12]详细介绍了数值求解流动和传热问题;文献[13—16]对有限差分法的数值解法进行深入研究,并解决了相关实际问题。

本文主要研究双层玻璃窗的隔热问题,包括以下内容:(1)对双层玻璃窗进行结构分析,建立热传导模型方程,并给出符号说明;(2)根据有限差分法给出模型方程的数值格式,以及稳定性和误差分析的证明;(3)通过数值模拟,说明有限差分法的适用性和理论分析的正确性;(4)给出数值算例的结论,并简要总结研究内容。

1 建立偏微分方程模型

1.1 热传导方程

考虑空间某物体的热传导问题,物体温度函数 u 与物体的空间位置和时间有关,即 $u = u(x, y, z, t)$,其中, (x, y, z) 表示空间位置变量, t 表示时间变量。根据 Fourier 定律和能量守恒定律,可得非均匀各

收稿日期:2021-07-08;修回日期:2022-06-10

基金项目:山东省自然科学基金(ZR2019MA049)

通信作者简介:刘伟(1981—),女,副教授,硕士研究生导师,博士,研究方向为随机偏微分方程。E-mail:sdu_liuwei@163.com

向同性介质的热传导方程^[1-2]

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (1)$$

其中: u 为介质温度, c 为介质比热, $k > 0$ 表示导热系数, ρ 为介质密度。若介质是均匀的, k, c, ρ 均为常数, 令 $a^2 = \frac{k}{c\rho}$, 由方程(1)可得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right). \quad (2)$$

从双层玻璃窗的介质和结构角度来看, 假设玻璃是均匀的, 其特性是各向同性的, 分布在同一截面上的温度相同, 因此, 任一点处的温度函数 u 仅与厚度坐标 x 和时间 t 有关。简化方程(2)得到空间一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3)$$

1.2 结构分析

本文考虑的双层玻璃窗结构如图 1 所示, 其中: u 为室外温度, u_1 为外玻璃温度, u_2 为中间空气层温度, u_3 为内玻璃层温度, u_4 为室内温度; 两层玻璃之间有一定间隔, 内含干燥气体, 空气层厚度为 12 mm; 内外玻璃厚度均为 5 mm。

介质变化导致传热系数发生变化, 因此热量传递和温度变化不是整体线性的, 但临界界面处的温度相同, 将各介质层温度函数耦合可以得到整体的温度模型。由方程(3)可得各介质层的热传导方程, 见表 1。

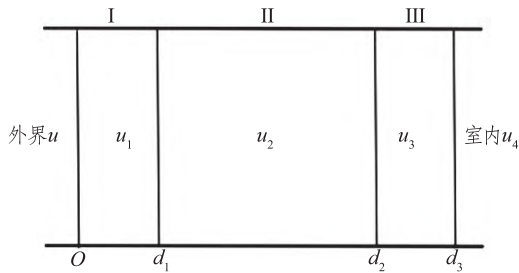


图 1 双层玻璃窗结构

Fig. 1 Structure of double-glazed window

表 1 各介质层热传导方程及其参数
Tab. 1 Heat conduction equations and parameters of each dielectric layer

介质层	热传导方程	参数	x 取值范围
外玻璃层	$\frac{\partial u_1}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$	$a_1^2 = \frac{k_1}{c_1 \rho_1}$	$[0, d_1)$
空气夹层	$\frac{\partial u_2}{\partial t} = a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$	$a_2^2 = \frac{k_2}{c_2 \rho_2}$	$[d_1, d_2]$
内玻璃层	$\frac{\partial u_3}{\partial t} = a_3^2 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2}$	$a_3^2 = \frac{k_3}{c_3 \rho_3}$	$(d_2, d_3]$

1.3 初边值条件

在热量传递过程中, 由于内临界界面是无缝相接的, 前一介质流出的热量与后一介质流入的热量相等, 因此耦合条件为

$$k_i \frac{\partial u_i}{\partial n_i} \Big|_{d_i} = k_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial n_{i+1}} \Big|_{d_i}, i = 1, 2, \quad (4)$$

其中, d_i 为内临界界面的坐标位置, n_i 为各介质在临界界面处的外法线方向。

由于整体的温度变化是连续的, 因此, 根据热流密度相等可以给出耦合条件

$$u_i(x, t) \Big|_{d_i} = u_{i+1}(x, t) \Big|_{d_i}, i = 1, 2. \quad (5)$$

设初始时刻 $t = t_0$ 时, 窗户整体温度为 u_0 , 初始条件为

$$u_i(x, t) \Big|_{t=t_0} = u_0, x \in [d_{i-1}, d_i], i = 1, 2, 3, d_0 = 0. \quad (6)$$

由于外玻璃与空气直接接触, 因此, 将白天室外温度作为左边界条件, 即

$$u(x, t) \Big|_{x=0} = u, t \in [t_0, T]. \quad (7)$$

热量在双层玻璃窗内部逐层传递, 导致不同位置温度不同。因此, 内玻璃与室内临界界面处存在温差, 产

生热交换现象,此过程遵循牛顿冷却定律,则右边界条件为

$$-k_3 \frac{\partial u_3}{\partial n_3} = k_4(u_3 - u_4), \quad (8)$$

其中, k_4 为牛顿热交换系数, u_3 为内玻璃右边界处的温度, u_4 为室内温度。

1.4 模型方程

综合热传导方程(表1)、耦合条件(4)~(5)、初边值条件(6)~(8),可得双层玻璃窗的温度分布模型如下:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} = a_i^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, a_i^2 = \frac{k_i}{c_i \rho_i}, i = 1, 2, 3, \\ k_i \frac{\partial u_i}{\partial n_i} \Big|_{d_i} = k_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial n_{i+1}} \Big|_{d_i}, u_i(x, t) \Big|_{d_i} = u_{i+1}(x, t) \Big|_{d_i}, i = 1, 2, \\ u_0(x, t) \Big|_{t=t_0} = u_0, x \in [0, d_3], \\ u(x, t) \Big|_{x=0} = u, u_4(x, t) \Big|_{x=d_3} = u_4, t \in [t_0, T], \\ -k_3 \frac{\partial u_3}{\partial n_3} = k_4(u_3 - u_4). \end{cases} \quad (9)$$

2 有限差分隐格式

有限差分法具有简单高效、通用性强且易实现等特点。由于双层玻璃窗的模型和初边值条件复杂,无法给出解析解,本文考虑采用有限差分法对模型进行数值模拟。由Lax等价定理知,差分格式的稳定性是差分格式收敛的充要条件。因此,需要对差分格式进行稳定性分析,也就是在求解过程中,避免因误差的传播而导致解爆破。

2.1 稳定性及误差分析

首先对模型方程(9)做离散化处理。为此,对定解区域进行网格剖分,将时间区间等距剖分成 N 份,记时间步长 $\tau = \frac{T}{N}$,同时将各空间区间等距剖分成 M 份,记空间步长 $h = \left\{ g_i \mid g_i = \frac{d_i - d_{i-1}}{M}, d_0 = 0, i = 1, 2, 3 \right\}$ 。

对模型方程(9)中第一个式子的一阶偏导数和二阶偏导数分别采用向后差分和中心差分近似代替,可得差分方程为

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} = \alpha \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}, \quad (10)$$

其中, u_j^n 表示温度 $u(x_j, t_n)$ 的近似值, $\alpha = a^2$ 为方程系数。令 $u_j^n = v^n e^{ikjh}$, 整理方程(10)得

$$[-\alpha \lambda v^n e^{-ikh} + (1 + 2\alpha \lambda) v^n - \alpha \lambda v^n e^{ikh}] e^{ikjh} = v^{n-1} e^{ikjh}, \quad (11)$$

其中, $\lambda = \frac{\tau}{h^2}$ 为网格比。化简可得方程(10)的增长因子为:

$$G(\tau, k) = \frac{1}{1 + 4\alpha \lambda \sin^2\left(\frac{1}{2}kh\right)}. \quad (12)$$

由于 $\alpha > 0$, 对于任意 λ , $|G(\tau, k)| \leq 1$, 因此,向后差分格式是无条件绝对稳定的。

下面对不在边界上的任意点 (x, t) 的差分格式进行截断误差分析。对方程(3)中的偏导数采用Taylor级数展开,得到

$$E_1 = u(x, t) - u(x, t - \tau) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \tau - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \tau^2 + \dots, \quad (13)$$

$$E_2 = u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} h^2 + \frac{1}{12} \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} h^4 + \dots. \quad (14)$$

假设解 $u(x, t)$ 是光滑的, 由式(13)、(14)可得截断误差为

$$E = \frac{1}{\tau} E_1 - \alpha \frac{1}{h^2} E_2 = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tau - \frac{\alpha}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} h^2 + \dots. \quad (15)$$

通过以上分析可知, 截断误差 $E = O(\tau + h^2)$ 。

2.2 差分隐格式

对热传导方程(3)采用有限差分隐格式离散化处理, 可得

$$-\alpha_i \lambda_i u_{i,j-1}^n + (1 + 2\alpha_i \lambda_i) u_{i,j}^n - \alpha_i \lambda_i u_{i,j+1}^n = u_{i,j}^{n-1}, i = 1, 2, 3. \quad (16)$$

在各内临界面处, 离散耦合关系式为

$$-\frac{k_i}{h_i} u_{i,iM}^n + \left(\frac{k_i}{h_i} + \frac{k_{i+1}}{h_{i+1}} \right) u_{i,iM+1}^n - \frac{k_{i+1}}{h_{i+1}} u_{i,iM+2}^n = 0, i = 1, 2, \quad (17)$$

其中, $u_{i,iM}^n$ 表示介质层 i 在位置 iM 处 n 时刻的数值解温度。

考虑到内玻璃与室内的临界面处存在热交换现象, 将其作为第三类边界条件。为此, 对位置坐标采用向后差分法进行离散整理, 得

$$-\frac{k_3}{h_3} u_{3,3M}^n + \left(k_4 + \frac{k_3}{h_3} \right) u_{3,3M+1}^n = k_4 u_{4,3M+1}^n. \quad (18)$$

将离散格式(16)~(18)及相关条件整理后, 得到双层玻璃窗温度分布的离散格式

$$\begin{cases} -\alpha_i \lambda_i u_{i,j-1}^n + (1 + 2\alpha_i \lambda_i) u_{i,j}^n - \alpha_i \lambda_i u_{i,j+1}^n = u_{i,j}^{n-1}, \alpha_i = \frac{k_i}{c_i \rho_i}, i = 1, 2, 3, \\ -\frac{k_i}{h_i} u_{i,iM}^n + \left(\frac{k_i}{h_i} + \frac{k_{i+1}}{h_{i+1}} \right) u_{i,iM+1}^n - \frac{k_{i+1}}{h_{i+1}} u_{i,iM+2}^n = 0, i = 1, 2, \\ u_i(x, t) \Big|_{d_i} = u_{i+1}(x, t) \Big|_{d_{i+1}}, \\ -\frac{k_3}{h_3} u_{3,3M}^n + \left(k_4 + \frac{k_3}{h_3} \right) u_{3,3M+1}^n = k_4 u_{4,3M}^n, \\ u(x, t) \Big|_{t=t_0} = u_0, x \in [0, d_3], \\ u(x, t) \Big|_{x=0} = u, u(x, t) \Big|_{x=d_3} = u_4, t \in [t_0, T]. \end{cases} \quad (19)$$

3 数值算例

测量白天室外温度, 数据见表 2。曲线拟合得到左边界条件为

$$u = -0.010 1x^3 + 0.106 1x^2 + 2.662x - 5.636, t \in [t_0, T]。$$

假定初始温度 $u_0 = 17 \text{ }^\circ\text{C}$, 室内温度 $u_4 = 17 \text{ }^\circ\text{C}$; $t \in [8, 18]$; 其他参数借助 MATLAB 软件求得。

表 2 室外气温数据

Tab.2 The temperature data of outdoor

采样时刻	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
温度/ $^\circ\text{C}$	17	20	22	22	24	25	25	24	23	20	18

对定解区域采用不均匀剖分, 根据数值格式整理得到方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, 矩阵 \mathbf{A} 为三对角线型矩阵。首先将初始条件代入 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 中, 得到 $t = 1$ 时所有网格点上的温度值 $[u_{1,2}^2 \quad u_{1,3}^2 \quad \dots \quad u_{3,3M+1}^2]^T$, 结合边值

条件和 $t = 1$ 时间层上的数值解,得到新的右端项 \mathbf{b} , 即

$$\mathbf{b} = [u_{1,2}^2 + \alpha_1 \lambda_1 u_{3,1}^2 \quad u_{1,3}^2 \quad \cdots \quad u_{1,M}^2 \quad 0 \quad u_{2,M+2}^2 \quad \cdots \quad u_{3,3M}^2 u_4]^T,$$

将该向量 \mathbf{b} 再代入方程组,求得 $t = 2$ 时的温度值为 $[u_{1,2}^3 \quad u_{1,3}^3 \quad \cdots \quad u_{3,3M+1}^3]^T$ 。按照时间顺序逐层计算,得到所有网格点上的温度数值,进而得到温度分布情况,如图 2 所示。

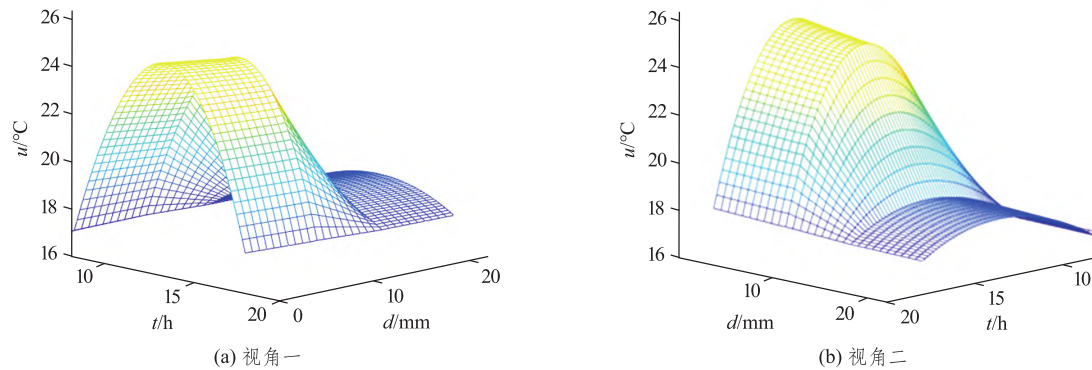


图 2 双层玻璃窗温度分布

Fig. 2 Temperature distribution of double - glazed window

由图 2 可以看到,曲面整体较为光滑,按坡度大致分为 3 段,分别是外玻璃层、中间空气层和内玻璃层的温度随时间变化的情况。各临界面温度变化情况如图 3 (a) 所示,可以得到:外玻璃温度与外界温度几乎相等,最高可达 24.78 °C;而内玻璃层温度发生了明显下降,最高温度为 18.56 °C;玻璃窗内外最大温差可达 6.22 °C。不同时间贯穿双层玻璃窗的温度变化情况如图 3 (b) 所示,可以看到,中间气体夹层处的温度曲线变化明显,这也说明了双层玻璃窗具有良好的隔热效果。

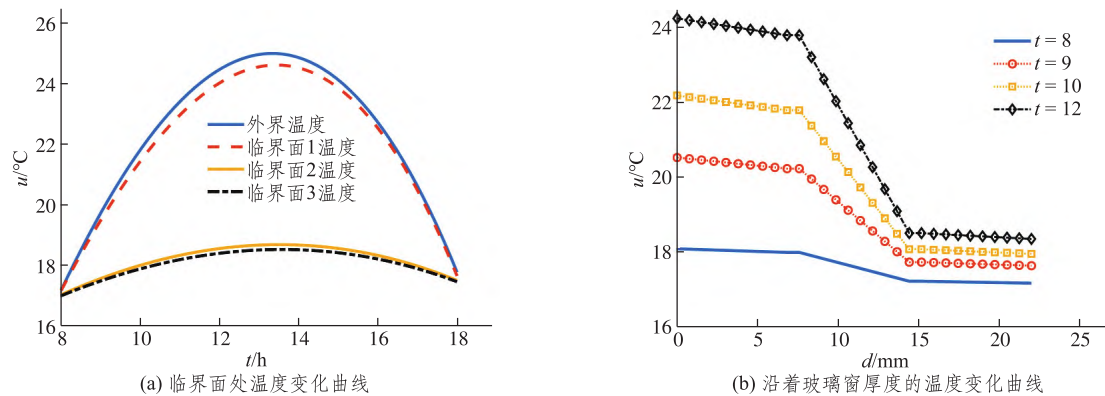


图 3 双层玻璃窗温度变化曲线

Fig. 3 Temperature curves of double - glazed window

采用相同的处理方式,对总玻璃厚度相同的单层玻璃情况进行分析,温度分布见图 4。

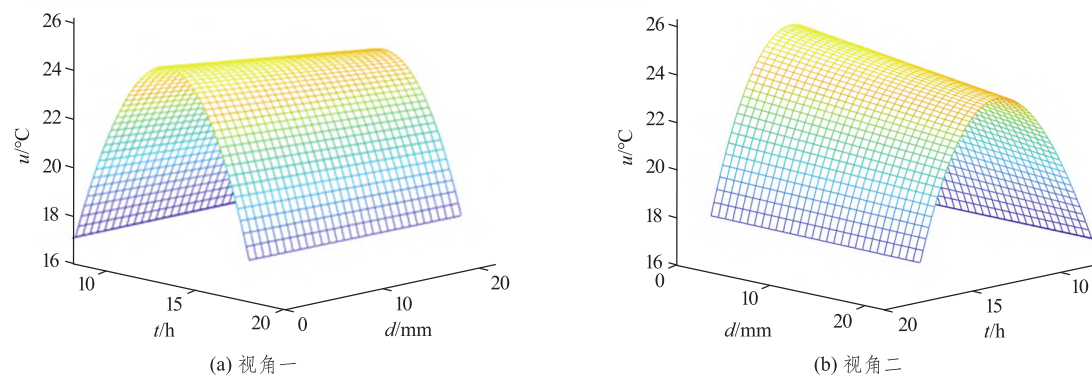


图 4 单层玻璃窗温度分布

Fig. 4 Temperature distribution of single - glazed window

通过图 4 可以看到,由于没有空气夹层,温度分布曲面整体光滑,并没有出现分段情况。内外临界面温度变化见图 5(a),可以得到,单层玻璃情况下热量没有被过多阻隔,在室外温度为 $24.78\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时,玻璃右边界温度最高为 $23.97\text{ }^{\circ}\text{C}$,内外温差仅为 $0.81\text{ }^{\circ}\text{C}$,说明单层玻璃窗基本没有隔热能力。图 5(b) 为不同时刻穿过单层玻璃窗的温度变化情况,同样可以看到,在没有中间气体夹层的情况下,玻璃窗内外温差很小,说明单层玻璃窗基本起不到隔热作用。

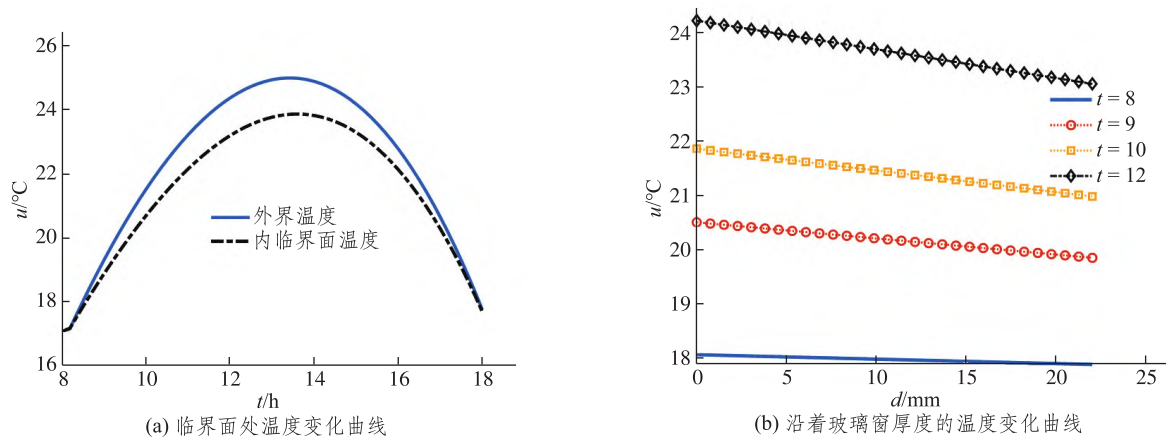


图 5 单层玻璃窗温度变化曲线

Fig.5 Temperature curves of single - glazed window

比较图 3 和图 5 得到,对于双层玻璃窗,当外界温度为 $24.78\text{ }^{\circ}\text{C}$ 、室内温度为 $17\text{ }^{\circ}\text{C}$ 时,内玻璃临界面处最高温度为 $18.56\text{ }^{\circ}\text{C}$,而相同条件下单层玻璃内界面温度为 $23.97\text{ }^{\circ}\text{C}$ 。因此,双层玻璃窗在隔热方面要比单层玻璃效果显著,在保证其他条件相同的情况下,双层玻璃窗的室内温度要比单层玻璃窗的室内温度低 $5.41\text{ }^{\circ}\text{C}$ 。

4 结论

本文基于差分隐格式对双层玻璃窗隔热问题进行分析。根据相关物理量和等量关系,建立热传导模型,并采用有限差分隐格式进行离散化处理。通过数值求解分析发现:相较于单层玻璃窗,双层玻璃窗具有良好的隔热性能。今后的研究工作是考虑具有更复杂边界条件的抛物问题,或者相关问题参数的反演。

参考文献:

- [1] 谷超豪,李大潜,陈恕行,等. 数学物理方程[M]. 3 版. 北京:高等教育出版社,2019.
- [2] 陆金甫,关治. 偏微分方程数值解法[M]. 3 版. 北京:清华大学出版社,2016.
- [3] 戴嘉尊,邱建贤. 微分方程数值解法[M]. 南京:东南大学出版社,2008.
- [4] 詹涌强. 求解热传导方程的一个高精度格式[J]. 西南师范大学学报(自然科学版),2015(1):18-22.
- [5] 詹涌强,凌婷. 求解一维热传导方程的一族三层格式[J]. 西南师范大学学报(自然科学版),2020(11):1-5.
- [6] 吴宏伟. 一类半线性抛物方程的差分格式及收敛性和稳定性[J]. 工程数学学报,2008(6):551-554.
- [7] 郝涛,王怡. 一类变系数抛物方程的交替分段显-隐差分格式[J]. 山东师范大学学报(自然科学版),2007(2):6-9.
- [8] 刘明鼎,张艳敏,段素芳. 求解一维变系数抛物方程的高精度数值解法[J]. 曲阜师范大学学报(自然科学版),2018,44(3):19-24.
- [9] 李灿,高彦栋,黄逸. 热传导问题的 MATLAB 数值计算[J]. 华中科技大学学报(自然科学版),2002(9):91-93.
- [10] 彭芳麟. 数学物理方程的 MATLAB 解法与可视化[M]. 北京:清华大学出版社,2004.
- [11] 王飞,裴永祥. 有限差分方法的 MATLAB 编程[J]. 新疆师范大学学报(自然科学版),2003(4):22-27.
- [12] 陶文铨. 数值热传学[M]. 2 版. 西安:西安交通大学出版社,2001.

- [13] 陆金甫,张宝琳,徐涛. 求解扩散方程的分段显-隐格式方法[J]. 数值计算与计算应用,1983(1):115-120.
- [14] LIU W, CUI J T, WANG Z F. A finite difference approximation of reduced coupled model for slightly compressible Forchheimer fractures in Karst aquifer system[J]. Numerical Algorithms,2020,86(1):133-163.
- [15] 吴鑫波,朱卫军,曾明伍,等. 抛物方程(PE)方法在风电场噪声传播中的应用研究[J]. 华北电力大学学报(自然科学版),2020,47(4):80-85.
- [16] MA M S, WANG X F. An explicit difference scheme with high accuracy and branching stability for solving parabolic partial differential equation[J]. Chinese Quarterly Journal of Mathematics,2000,15(4):98-103.

Heat Insulation Problem of Double-glazed Window Based on Differential Implicit Scheme

FAN Gexian, LIU Wei

(School of Mathematics and Statistics Science, Ludong University, Yantai 264039, China)

Abstract: In this paper, the heat insulation of double-glazed window is studied and simulated by finite difference implicit scheme. The structure of double-glazed window was analyzed and one-dimensional heat conduction equation was established. The inner boundary coupling condition, the first kind of left boundary condition and the third kind of right boundary condition were given according to heat flux equality. The finite difference implicit scheme was used to simulate the discretization of the model equations, and the thermal insulation of single-glazed window with the same total thickness was analyzed. The comparative analysis shows that under the same other conditions, when the outdoor temperature is 24.78 °C, the indoor temperature of double-glazed window with 12 mm air sandwich is 5.41 °C, which is lower than that of single-glazed window.

Keywords: double-glazed window; heat conduction equation; finite difference implicit scheme; numerical calculation

(责任编辑 顾建忠)

版权声明

根据《中华人民共和国著作权法》《信息网络传播权保护条例》等法律法规的规定,本刊作如下声明:

1. 作者向本刊投稿,即表明同意将作品的发表权、删改权、信息网络传播权、数字化汇编权、数字化复制权、数字化制品形式(包括光盘、互联网出版物)出版发行权等权利授予本刊,并视同许可本刊官方新媒体免费转载以及与有关数据库的合作(本刊不再另行支付费用)。如不同意以上授权,请在投稿时说明。

2. 本刊刊载的全部编辑内容归《鲁东大学学报(自然科学版)》编辑部所有,非经书面同意,任何单位和个人不得转载、摘编、刊印或以其他方式使用。如有违反,本刊保留一切法律追究的权利。

3. 本刊版面、栏目等受著作权保护,对复制、仿制、假冒者将追究法律责任。

4. 已在本刊发表的论文,本刊具有免费结集出版精华本、合订本以及相关电子产品的权利,有特别声明者除外。

《鲁东大学学报(自然科学版)》编辑部