鲁东大学学报(自然科学版)
Journal of Ludong University(Natural Science Edition) 2023,39(3):238—242

Doi:10.20062/j.cnki.CN 37-1453/N.2023.03.007

空间维数对椭圆型微分方程解的影响

马玉瑾,樊永红,王琳琳

(鲁东大学 数学与统计科学学院,山东 烟台 264039)

摘要: 本文研究一类带有 Hardy-Sobolev 临界指数的椭圆型微分方程在一定条件下的临界维数问题。通过利用 Pohozaev 型恒等式的论证方法和 Bessel 函数,得出在一定维数范围下方程解的不存在性结论。

关键词: 临界维数; Hardy-Sobolev 临界指数; Pohozaev 恒等式; Bessel 函数

中图分类号: O175.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1673-8020(2023)03-0238-05

椭圆型微分方程在物理学、机械制造及生命科学等领域中有广泛的应用,其临界维数问题是微分方程问题中较重要的一部分,因此,很多学者研究相关问题并得出一些很好的结论[1-6]。

考察如下带有 Sobolev 临界指数的椭圆型微分方程:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{2^*-1} + \lambda u, & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中: Ω 是 $\mathbf{R}^N(N \geqslant 3)$ 中有界光滑的开子集,$0 \in \Omega$; $0 \leqslant \mu < \bar{\mu} \triangleq \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$; $2^* \triangleq \frac{2N}{N-2}$ 是 Sobolev 临界指数。文献[1]证明了当 Ω 为星形区域且 $\lambda = 0$ 时,方程(1)不存在非平凡解。文献[2]基于 Pohozaev 理论证明了当 Ω 为球形区域,方程(1)在 $N=3$,$\lambda \leqslant \frac{1}{4}\lambda_1$ 时无解;并得出 $N \geqslant 4$,$0 < \lambda < \lambda_1(\mu)$ 和 $N=3$,$\lambda_*(\mu) < \lambda < \lambda_1(\mu)$ 两种情况下,方程(1)至少存在一个解 $u \in H_0^1(\Omega)$,其中 $\lambda_*(\mu)$,$\lambda_1(\mu)$ 定义见本文引理 1。根据文献[7—9],称 $N=3$ 是方程(1)的临界维数。

在文献[2]的基础上,文献[10]研究带有 Hardy 项,且包含 Sobolev 临界指数的椭圆型微分方程:

$$\begin{cases} -\Delta u - \mu \frac{u}{|x|^2} = u^{2^*-1} + \lambda u, & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

得出:当 $2+2\sqrt{\mu} < N < 2+2\sqrt{\mu+1}$,$\lambda \leqslant \lambda_*(\mu)$,且 $\Omega = B(0,R)$ 时,方程(2)无解;当 $N \geqslant 2+2\sqrt{\mu+1}$,$0 < \lambda < \lambda_1(\mu)$ 或 $2+2\sqrt{\mu} < N < 2+2\sqrt{\mu+1}$,$\lambda_*(\mu) < \lambda < \lambda_1(\mu)$ 时,方程(2)至少存在一个解 $u \in H_0^1(\Omega)$。此外,文献[11]对方程(2)做了进一步的研究,得出当 $N > 4$,$0 < \lambda < \lambda_1$ 时方程(2)有解的结论。

本文主要研究如下带有 Sobolev 临界指数的椭圆型微分方程:

$$\begin{cases} -\Delta u - \mu \frac{u}{|x|^2} = \frac{u^{2^*(s)-1}}{|x|^s} + \lambda u^{q-1}, & x \in \Omega, \\ u > 0, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{3}$$

收稿日期: 2022-02-24; **修回日期:** 2023-01-23

基金项目: 国家自然科学基金(11201213);山东省自然科学基金(ZR2015AM026);山东省高校科技发展计划(J15LI07)

通信作者简介: 樊永红(1973—),男,教授,硕士研究生导师,博士,研究方向为非线性分析及微分方程。E-mail: fanyh_1993@sina.com

的临界维数问题，其中：Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中的有界光滑开子集，$0 \in \Omega$；$N \geqslant 3$，$\lambda > 0$，$0 \leqslant s < 2$；$2^*(s) \triangleq \frac{2(N-s)}{N-2}$ 是 Hardy-Sobolev 临界指数。

目前已得到：当 $2+2\sqrt{\bar{\mu}} < N < 2+2\sqrt{\bar{\mu}+1}$，$\lambda_*(\mu) < \lambda < \lambda_1(\mu)$ 时，方程(3)有解[12]。本文将讨论当 $\lambda \leqslant \lambda_*(\mu)$ 时方程(3)的解的情况。

1 预备知识

下面 3 个引理对于本文结论的形成具有重要作用。

引理 1[12] 若 $q=2$，当 $\lambda_*(\mu) < \lambda < \lambda_1(\mu)$ 时，方程(3)至少有一个解 $u \in H_0^1(\Omega)$，其中，

$$\lambda_1(\mu) = \min_{u \in H_0^1(\Omega)} \frac{\|u\|^2}{\int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}x}，\ \|u\| \triangleq \left[\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \mu \frac{u^2}{|x|^2}\right)\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{2}}，\forall u \in H_0^1(\Omega)，$$

$$\lambda_*(\mu) = \min_{u \in H_0^1(B)} \frac{\int_\Omega \frac{|\nabla v(x)|^2}{|x|^{2\gamma}}\mathrm{d}x}{\int_\Omega \frac{|v(x)|^2}{|x|^{2\gamma}}\mathrm{d}x}，\gamma = \sqrt{\bar{\mu}} + \sqrt{\bar{\mu} - \mu}。$$

引理 2[13] 设 $u \in C^2$ 是方程 $\begin{cases}\Delta u + f(r,u) = 0，\\ u\big|_{|x|=R} = 0\end{cases}$ 的一个正解，则 u 是径向对称的，这里 $\Omega = B(0,R)$，$f(r,u) \in C^1$，且 $f(r,u)$ 关于 r 递减。

引理 3[10] Bessel 函数 $J_\sigma(z) = \sum_{h=0}^{\infty}(-1)^h \frac{(z/2)^{\sigma+2h}}{h!\Gamma(\sigma+h+1)}$，有以下性质成立：

(i) $x^2 J_\sigma''(x) + xJ_\sigma'(x) + (x^2 - \sigma^2)J_\sigma(x) = 0$；

(ii) 对任意 $\sigma > -1$，存在 $x_\sigma > 0$，当 $x \in (0, x_\sigma)$ 时，$J_\sigma(x) > 0$，且 $J_\sigma(x_\sigma) = 0$；

(iii) 若 $-1 < \sigma' < \sigma''$，则有 $0 < x_{\sigma'} < x_{\sigma''}$；

(iv) $J_\sigma'(x) = \frac{\sigma}{x}J_\sigma(x) - J_{\sigma+1}(x)$。

2 解的不存在性

定理 1 若 $q=2$，$0 \leqslant \mu < \bar{\mu} \triangleq \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$，$2+2\sqrt{\bar{\mu}} < N < 2+2\sqrt{\bar{\mu}+1}$，$\Omega = B$，则当 $\lambda \leqslant \lambda_*(\mu)$ 时，方程(3)无解。

证明 设 u 是方程(3)的一个正解，根据引理 2 可知，u 是球面对称的。不失一般性，令 $B = B(0,1)$。根据球坐标变换，将 λ_1 和 λ_* 改写为

$$\lambda_1(\mu) = \min_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u = u(\rho)}} \frac{\int_0^1 \left(\rho^{N-1}(u'(\rho))^2 - \mu\rho^{N-3}u^2(\rho)\right)\mathrm{d}\rho}{\int_0^1 \rho^{N-1}u^2(\rho)\,\mathrm{d}\rho}，$$

$$\lambda_*(\mu) = \min_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ v = v(\rho)}} \frac{\int_0^1 \left(\rho^{N-1-2\gamma}(v'(\rho))^2\right)\mathrm{d}\rho}{\int_0^1 \rho^{N-1-2\gamma}v^2(\rho)\,\mathrm{d}\rho}，$$

其中，极值函数 u 和 v 分别满足下面的方程组：

$$\begin{cases} u''(\rho)+\dfrac{N-1}{\rho}u'(\rho)+\mu\dfrac{u(\rho)}{\rho^2}+\lambda_1(\mu)u(\rho)=0, \\ v''(\rho)+\dfrac{N-1-2\gamma}{\rho}v'(\rho)+\lambda_*(\mu)v(\rho)=0。\end{cases} \tag{4}$$

定义 $w(\rho)=\rho^{\gamma'}u(\rho)$，则方程组(4)变为

$$\begin{cases} w''(\rho)+\dfrac{v_1-1}{\rho}w'(\rho)+\lambda_1(\mu)w(\rho)=0, \\ v''(\rho)+\dfrac{v_2-1}{\rho}v'(\rho)+\lambda_*(\mu)v(\rho)=0,\end{cases} \tag{5}$$

其中，$\gamma'=\sqrt{\bar{\mu}}-\sqrt{\bar{\mu}-\mu}$，$v_1=N-2\gamma'=2\left(1+\sqrt{\bar{\mu}-\mu}\right)$，$v_2=N-2\gamma=2\left(1-\sqrt{\bar{\mu}-\mu}\right)$。

令 $\eta=\sqrt{\bar{\mu}-\mu}$，代入方程组(5)，得到

$$\begin{cases} \tilde{w}''(\rho)+\dfrac{v_1-1}{\rho}\tilde{w}'(\rho)+\tilde{w}(\rho)=0, \\ \tilde{v}''(\rho)+\dfrac{v_2-1}{\rho}\tilde{v}'(\rho)+\tilde{v}(\rho)=0。\end{cases} \tag{6}$$

求得方程组(6)的解为

$$\begin{cases} \tilde{w}(\rho)=\rho^{-\eta}J_\eta(\rho), \\ \tilde{v}(\rho)=\rho^{\eta}J_{-\eta}(\rho),\end{cases} \tag{7}$$

由方程组(5)、(6)，可得

$$\lambda_1(\mu)=x_\eta^2,\ \lambda_*(\mu)=x_{-\eta}^2, \tag{8}$$

则有 $u(x)=\rho^{-\gamma'}\tilde{w}(x_\eta\rho)$，$v(x)=\rho^{\gamma'}\tilde{v}(x_{-\eta}\rho)$。将式(7)代入式(8)后，得到

$$\begin{cases} u(\rho)=\rho^{1-N/2}J_\eta(x_\eta\rho), \\ v(\rho)=\rho^{\eta}J_{-\eta}(x_{-\eta}\rho)。\end{cases} \tag{9}$$

根据方程(3)可得

$$u''+\frac{N-1}{\rho}u'+\mu\frac{u}{\rho^2}+\lambda u+\frac{u^{2^*-1}}{\rho^s}=0。 \tag{10}$$

假设 $\psi(\rho)$，$\omega(\rho)$ 均为二阶连续可微函数，且 $\psi(0)=0$，$\psi'(\rho)>0$。将式(10)分别乘 $\rho^{N-1}u'(\rho)\psi(\rho)$ 和 $\rho^{N-1}u(\rho)\omega(\rho)$，然后相加并在区间 $[0,1]$ 上积分，得

$$I_1+I_2+I_3=\frac{1}{2}\psi(1)(u'(1))^2, \tag{11}$$

其中:

$$I_1=\int_0^1\rho^{N-1}u'^2\left(\frac{1}{2}\psi'-\frac{N-1}{2}\frac{\psi}{\rho}-\omega\right)\mathrm{d}\rho,$$

$$I_2=\frac{1}{2}\int_0^1\rho^{N-1}u^2\left[\omega''+(N-1)\frac{\omega'}{\rho}+\frac{\mu}{\rho^2}\left(2\omega+\psi'+(N-3)\frac{\psi}{\rho}\right)+\lambda\left(\psi'+(N-1)\frac{\psi}{\rho}+2\omega\right)\right]\mathrm{d}\rho,$$

$$I_3=\int_0^1\rho^{N-s-1}u^{\frac{2(N-s)}{N-2}}\left[\frac{(N-s-1)(N-2)}{2(N-s)}\frac{\psi}{\rho}+\frac{N-2}{2(N-s)}\psi'+\omega\right]\mathrm{d}\rho。$$

令 $\omega=\dfrac{1}{2}\psi'-\dfrac{N-1}{2}\dfrac{\psi}{\rho}$，则式(11)化简为

$$I_2+I_3=\frac{1}{2}\psi(1)(u'(1))^2。 \tag{12}$$

现考虑方程 $I_2=0$，令 $\varphi(\rho')=\psi\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\rho\right)$，则有

$$\begin{cases}\varphi''' + [(N-1)(N-3)+4\mu]\left(\dfrac{\varphi'}{\rho^2}-\dfrac{\varphi}{\rho^3}\right)+4\varphi'=0,\\ \varphi(0)=0,\ \varphi'(0)=1,\ \varphi''(0)=0。\end{cases} \tag{13}$$

将方程(13)的解 φ 的第一个正根记作 ρ_0,求得 $I_2=0$ 时的第一特征值 $\lambda=\rho_0^2$。根据引理 3(i),将方程(13)的解 φ 写为

$$\varphi(\rho)=\rho J_{-\eta}(\rho)J_{\eta}(\rho), \tag{14}$$

可以得到 φ 的第一个正根为 $\rho_0=x_{-\eta}$,则 $\lambda=\lambda_*(\mu)=x_{-\eta}^2$。选择 $\psi(\rho)=\varphi(\sqrt{\lambda}\rho)$,则式(12)化简为

$$\frac{2N-s-2}{2(N-s)}\int_0^1\rho^{N-s-1}u^{\frac{2(N-s)}{N-2}}\left(\psi'-\frac{\psi}{\rho}\right)\mathrm{d}\rho=\frac{1}{2}\psi(1)(u'(1))^2。 \tag{15}$$

根据引理 3(ii)、(iii)知,当 $\lambda\leqslant\lambda_*(\mu)=x_{-\eta}^2$ 时,

$$\psi(1)=J_{-\eta}(\sqrt{\lambda})J_{\eta}(\sqrt{\lambda})\geqslant 0,\ \sqrt{\lambda}\in[0,x_{-\eta})。 \tag{16}$$

进一步由引理 3(iv),可得

$$(J_{-\eta}(\rho)J_{\eta}(\rho))'=-J_{-\eta}(\rho)J_{\eta+1}(\rho)-J_{1-\eta}(\rho)J_{\eta}(\rho)<0,$$

其中,$\rho\in[0,\sqrt{\lambda})\subset[0,x_{-\eta})$,$0<\eta<1$,则有

$$\psi'-\frac{\psi}{\rho}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\psi}{\rho}\right)'<0,\ \rho\in[0,1)。 \tag{17}$$

根据式(16)可知,式(15)右边大于 0,这与式(17)矛盾,即方程(3)无解。

3　结语

本文利用 Pohozaev 恒等式和 Bessel 函数,探究了一类带有 Hardy-Sobolev 临界指数的椭圆型微分方程的临界维数问题,证明该微分方程在一定条件下解的不存在性。下一步工作是将此方法应用到更一般的方程证明中,得出有关临界维数的结论,例如,探究 p-拉普拉斯方程的临界维数问题。

参考文献:

[1] POHOZAEV S. Eigenfunctions of the equation $\Delta u+\lambda f(u)=0$ [J]. Doklady Mathematics, 1965, 6: 1408-1411.

[2] BREZIS H, NIGENBERG L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1983, 36(4): 437-477.

[3] 贾润杰,商彦英. 一类边界奇异临界椭圆方程正解的存在性 [J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2021, 46(6): 36-41.

[4] 曹道民,彭双阶,王庆芳. Pohozaev 恒等式及其在非线性椭圆型方程中的应用 [J]. 中国科学: 数学, 2016, 46(11): 1649-1674.

[5] WANG M C, ZHANG Q. Existence of solutions for singular critical semilinear elliptic equation [J]. Applied Mathematics Letters, 2019, 94: 217-223.

[6] LI Y X, GAO W J. Existence of multiple solutions for quasilinear elliptic equation with critical Sobolev-Hardy terms [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2015, 38(1): 145-154.

[7] PUCCI P, SERRIN J. A general variational identity [J]. Indiana University Mathematics Journal, 1986, 35(3): 681-703.

[8] PUCCI P, SERRIN J. Critical exponents and critical dimensions for polyharmonic operators [J]. Journal of Differential Equations, 1990, 69(1): 55-83.

[9] FILIPPO G. Critical growth problems for polyhamonic operators [C] //Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 1998.

[10] JANNELLI E. The role played by space dimension in elliptic critical problems [J]. Journal of Differential Equations, 1999, 156(2): 407-426.

[11] DENG Y B, WANG J X. Critical exponents and critical dimensions for quasilinear elliptic problems [J]. Nonlinear

Analysis,2011,74(11):3458-3467.

[12] KANG D S,PENG S J. Positive solutions for singular critical elliptic problems[J]. Applied Mathematics Letters,2004,17(4):411-416.

[13] GIDAS B,NI W M,NIRENBERG L. Symmetry and related properties via the maximum principle[J]. Communications in Mathematical Physics,1979,68(3):209-243.

Influence of Space Dimensions on Solutions of Elliptic Differential Equations

MA Yujin, FAN Yonghong, WANG Linlin

(School of Mathematics and Statistics Science,Ludong University,Yantai 264039,China)

Abstract: In this paper,the critical dimension of a class of elliptic differential equations with Hardy-Sobolev critical exponent is investigated under certain conditions. By using Pohozaev identity and Bessel function,the nonexistence of the solution of the equation in a certain dimension was obtained.

Keywords: critical dimension; Hardy-Sobolev critical exponent; Pohozaev identity; Bessel function

(责任编辑 顾建忠)

(上接第237页)

Abstract ID: 1673-8020(2023)03-0232-EA

Generalized Predictive Control of Continuous Pharmaceutical Feeding Blending Units

GU Yingxin, LIU Xiaohua, GAO Rong

(School of Mathematics and Statistics Science,Ludong University,Yantai 264039,China)

Abstract: The generalized predictive control problem of the feeding mixing system is studied by considering the effect of measurement noise on the feeding blending system. The linear Kalman filter was used to estimate the system state for the state space model of the feeding blending unit,and the generalized predictive control law was designed based on the multivariate generalized predictive control theory. The simulation results show that the controller can reduce the influence of measurement noise on the system,effectively control the rotational speed of the rotating shaft,and make the outlet mass flow rate reach constant.

Keywords: feeding blending units; measurement noise; Kalman filter; generalized predictive control(GPC)

(责任编辑 顾建忠)