

多个飞艇的均方协同跟踪控制

王 程,李武全

(鲁东大学 数学与统计科学学院,山东 烟台 264039)

摘要:针对受二阶矩过程干扰的多个飞艇系统,提出了一种新的控制器设计方案,解决其均方协同跟踪控制问题。首先在混合坐标系下建模,得到飞艇的随机系统模型;结合反推法和图论,设计了具有可调参数的协同控制器。所设计的控制器不仅能够保证闭环系统所有信号依概率有界,还能使领导者与跟随者之间的输出跟踪误差均方调节到任意小。最后,通过仿真实例验证了所提控制方案的有效性。

关键词:多个飞艇系统;均方协同跟踪控制;二阶矩过程

中图分类号:TP273 **文献标志码:**A **文章编号:**1673-8020(2023)04-0344-08

近年来,随着飞艇在航空、军事等领域的广泛应用,其控制问题受到世界各国越来越多的关注。文献[1]利用反推法对无人飞艇模型设计控制器,解决了飞艇的轨迹跟踪问题;文献[2]基于无源性,对飞艇模型设计控制器,并进行稳定性分析。文献[1—2]没有考虑随机干扰下飞艇系统的控制问题,而随机干扰在工程实际中广泛存在,因此研究具有随机干扰的飞艇控制问题有重要实际意义。随机干扰通常被认为是白噪声^[3-4],文献[5]指出二阶矩过程能更合理地描述物理系统所受到的随机干扰,因此,研究受二阶矩过程干扰的飞艇模型更合理。文献[6]针对受二阶矩过程干扰的飞艇模型,利用反推法设计控制器,解决了飞艇的随机轨迹均方跟踪问题。

相比单个系统,多自主体系统在军事、地质勘探、航空工业等多个领域有更广泛的应用,因此关于多自主体系统的研究受到越来越多的关注^[7-9]。文献[10]利用反推法解决了在有向拓扑下受二阶矩过程扰动的多个非线性基准系统的协同控制问题,并对其进行稳定性分析。本文基于反推法,在有向拓扑下研究受二阶矩过程干扰的多个飞艇系统的均方协同跟踪控制问题,主要创新点包括以下两点:

1) 目前关于飞艇的研究主要是针对单个系统的控制问题^[11-13],对多自主体系统来说,同时考虑各个飞艇之间的信息交互和二阶矩过程的扰动,会使得多个飞艇系统的协同控制问题极具挑战性。与文献[6]的设计方法不同,本文基于反推法设计具有可调参数的协同控制器,可以有效地处理各个跟随者之间的信息交互。

2) 不同于带有白噪声的飞艇模型^[3-4],本文考虑多个飞艇系统在二阶矩过程扰动下的协同控制问题。在进行控制器设计和稳定性分析时,如何有效处理二阶矩过程是解决该问题的一个挑战。

1 问题描述

考虑受二阶矩过程干扰的非线性系统:

$$\dot{z} = h_1(z) + h_2(z)\xi(t), z(t_0) = z_0, \quad (1)$$

其中: $z \in \mathbf{R}^n$ 表示状态, h_1 和 h_2 是连续可微的向量函数; $\xi(t)$ 表示随机过程,对所有 t 满足 $E|\xi(t)|^2 < \infty$,这说明 $\xi(t)$ 是标准的二阶矩过程。

收稿日期:2022-05-16;修回日期:2023-03-15

基金项目:山东省高等学校“青创科技计划”(2019KJN017)

通信作者简介:李武全(1981—),男,教授,硕士研究生导师,博士,研究方向为随机非线性系统的控制与稳定性。E-mail: sea81@126.com

假设 1 二阶矩过程 $\xi(t)$ 是分段连续的随机过程,满足 $\sup_{t \geq t_0} E |\xi(t)|^2 < K$, 其中 $K > 0$ 。

定义 1^[14] 若随机过程 $|z(t)|$ 满足 $\lim_{c \rightarrow +\infty} \sup_{t > t_0} P\{|z(t)| > c\} = 0$, 称 $z(t)$ 是依概率有界的。

引理 1^[15] 对于系统(1),若假设 1 成立,且存在李雅普诺夫函数 $U(z(t))$,正常数 m_1, m_2 , 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \inf_{|z| > k} U(z) = +\infty, EU(z(t) \wedge \mu_k) \leq m_1 e^{m_2 t}, \forall k > 0,$$

则系统(1)在 $[t_0, +\infty)$ 存在唯一解 $z(t)$ 。

令 $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{\mathcal{E}})$ 表示由一个领导者(标记为 0)和 N 个跟随者组成的有向拓扑图。加权邻接矩阵为 $A = (a_{ij})_{N \times N}$, 若第 j 个跟随者向第 i 个跟随者传递信息, 则 $a_{ij} > 0$, 否则 $a_{ij} = 0$ 。定义矩阵 $B = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_N)$, 若领导者直接向第 i 个跟随者发送信息, 则 $b_i > 0$, 否则 $b_i = 0$ 。令跟随者的有向图为 $G = (V, \mathcal{E})$, 其拉普拉斯矩阵 L 定义为 $L = \text{diag}(\sum_{j \in N_1} a_{1j}, \sum_{j \in N_2} a_{2j}, \dots, \sum_{j \in N_N} a_{Nj}) - A$ 。

引理 2^[10] 设 λ 为矩阵 $H = L + B$ 的特征值, $\text{Re } \lambda > 0$ 当且仅当领导者在有向图 \bar{G} 中全局可达。

引理 3^[10] 设 α 为任意常数, 且 $g_1, g_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, 若对任意 $t \geq t_0 \geq 0, \dot{g}_2 \leq -\alpha g_2 + g_1$ 成立, 则有

$$g_2(t) \leq e^{-\alpha(t-t_0)} g_2(t_0) + \int_{t_0}^t e^{-\alpha(t-\tau)} g_1(\tau) d\tau.$$

符号说明: 设 $a = (a_1, a_2, a_3)^T, b = (b_1, b_2, b_3)^T, a \times b = S(a) b$ 是向量 a 与 b 的叉乘, 其中

$$S(a) = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} = -S^T(a).$$

2 飞艇的动态方程

假设 2^[6] 将飞艇看作刚体研究, 飞艇的质心与浮力中心重合在一点。

为准确描述飞艇运动时的位置、姿态、速度和加速度, 建立了惯性坐标系和体坐标系^[6]。令 $q_1 = (x, y, z)^T, q_2 = (\psi, \theta, \varphi)^T$ 分别表示飞艇的位置和姿态, $v_1 = (u, v, w)^T, v_2 = (p, q, r)^T$ 分别表示飞艇的速度和角速度。考虑各种阻尼 Kv 和气流 ξ , 六自由度飞艇的动态方程^[6]为:

$$\begin{cases} \dot{q} = T(q) v, \\ M\dot{v} + C(v) v + Kv + G(q) = u + \xi, \end{cases} \quad (2)$$

式中: $q = (q_1^T, q_2^T)^T, v = (v_1^T, v_2^T)^T, T(q) = \text{diag}(T_1, T_2(q)), T_1 = \text{diag}(1, 1, 1)$,

$$T_2(q) = \begin{pmatrix} 1 & \sin \varphi \tan \theta & \cos \varphi \tan \theta \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi \sec \theta & \cos \varphi \sec \theta \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} mE + M_a & mS^T(r_c) \\ mS(r_c) & J + J_a \end{pmatrix} = M^T, J = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix},$$

$$C(v) = \begin{pmatrix} 0 & -(mE + M_a) (S(r_c) S(v_2))^T \\ 0 & S(v_2) J + J_a \end{pmatrix}, G(q) = \begin{pmatrix} (B_f - mg) \sin \theta \\ -(B_f - mg) \cos \theta \sin \varphi \\ -(B_f - mg) \cos \theta \cos \varphi \\ -z_g mg \cos \theta \sin \varphi \\ -z_g mg \sin \theta - x_g mg \cos \theta \cos \varphi \\ x_g mg \cos \theta \sin \varphi \end{pmatrix},$$

$T(q)$ 是惯性坐标系和体坐标系之间的转换矩阵, E 为单位矩阵; Kv 为线性阻尼, K 是阻尼系数; m 为飞艇质量, M_a 为附加质量, J 为转动惯量矩阵, J_a 为附加惯量, $r_c = (x_g, y_g, z_g)^T$ 为飞艇重心坐标; $C(v)$ 是科氏矩阵, 矩阵 $G(q)$ 包含由重力和浮力形成的力和力矩, $S(r_c)$ 和 $S(v_2)$ 分别表示 r_c 和 v_2 的斜对称矩阵(对应于一个交叉积运算); ξ 为二阶矩过程, $u = (F, N)^T$ (F 和 N 分别表示外力和外力矩)。

注 1 根据假设 2, 若不考虑空气弹性效应, 飞艇处于中性浮力状态, 则 $B_f = mg$ ^[13]。

基于方程(2),考虑包含一个领导者和 N 个跟随者的多自主体系统的有向图 \bar{G} 。第 i 个跟随者的动态方程为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_i = \mathbf{T}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{v}_i, \\ \mathbf{M}\dot{\mathbf{v}}_i + \mathbf{C}_i(\mathbf{v}_i) \mathbf{v}_i + \mathbf{K}\mathbf{v}_i + \mathbf{G}_i(\mathbf{q}_i) = \mathbf{u}_i + \boldsymbol{\xi}_i, \\ \mathbf{y}_i = \mathbf{q}_i, i = 1, 2, \dots, N, \end{cases} \quad (3)$$

其中: $\mathbf{q}_i = (\mathbf{q}_{i1}^T, \mathbf{q}_{i2}^T)^T \in \mathbf{R}^6$, $\mathbf{v}_i = (\mathbf{v}_{i1}^T, \mathbf{v}_{i2}^T)^T \in \mathbf{R}^6$, $\mathbf{T}_i(\mathbf{q}_i) = \text{diag}(\mathbf{T}_{i1}, \mathbf{T}_{i2}(\mathbf{q}_i))$; $\boldsymbol{\xi}_i$ 为二阶矩过程, $\mathbf{u}_i = (\mathbf{F}_i, \mathbf{N}_i)^T$ 和 \mathbf{y}_i 分别表示第 i 个跟随者的输入和输出。假设领导者输出信号为 $\mathbf{y}_r(t)$ 。

假设3 飞艇的姿态 \mathbf{q}_{i2} 满足 $|\psi_i| < \pi$, $|\theta_i| < \frac{\pi}{2}$, $|\varphi_i| < \frac{\pi}{2}$, 转换矩阵 $\mathbf{T}_i(\mathbf{q}_i)$ 始终是可逆矩阵。

假设4 领导者在图 \bar{G} 中是全局可达的。

假设5 对于满足 $0 \in \mathcal{N}_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 的跟随者, 领导者输出 $\mathbf{y}_r(t)$, $\dot{\mathbf{y}}_r(t)$ 有界, 且为可获得信号。

3 控制器设计与稳定性分析

3.1 控制器设计

第1步: 定义 $\boldsymbol{\eta}_{i1} = \sum_{j=1}^N a_{ij}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j) + b_i(\mathbf{q}_i - \mathbf{y}_r)$, 结合方程(3)可得

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_{i1} = \sum_{j=1}^N a_{ij}(\mathbf{T}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{v}_i - \mathbf{T}_j(\mathbf{q}_j) \mathbf{v}_j) + b_i(\mathbf{T}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{v}_i - \dot{\mathbf{y}}_r) = d_i \mathbf{T}_i(\mathbf{q}_i) \mathbf{v}_i - \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{T}_j(\mathbf{q}_j) \mathbf{v}_j - b_i \dot{\mathbf{y}}_r, \quad (4)$$

其中, $d_i = b_i + \sum_{j=1}^N a_{ij}$, 由假设4可得, $d_i > 0$ 。选取 $V_{i1} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}_{i1}^T \boldsymbol{\eta}_{i1}$, 由式(4)可得

$$\dot{V}_{i1} = d_i \boldsymbol{\eta}_{i1}^T \mathbf{T}_i(\mathbf{q}_i) (\mathbf{v}_i - \boldsymbol{\alpha}_i) + d_i \boldsymbol{\eta}_{i1}^T \mathbf{T}_i(\mathbf{q}_i) \boldsymbol{\alpha}_i - \boldsymbol{\eta}_{i1}^T \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{T}_j(\mathbf{q}_j) (\mathbf{v}_j - \boldsymbol{\alpha}_j) - \boldsymbol{\eta}_{i1}^T \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{T}_j(\mathbf{q}_j) \boldsymbol{\alpha}_j - b_i \boldsymbol{\eta}_{i1}^T \dot{\mathbf{y}}_r. \quad (5)$$

由假设4和引理2可知, \mathbf{H} 是可逆矩阵。若选择虚拟控制器 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 为:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_1(\mathbf{q}_1) \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{T}_N(\mathbf{q}_N) \boldsymbol{\alpha}_N \end{bmatrix} = -(\mathbf{H}^{-1} \otimes \mathbf{I}_6) \begin{bmatrix} c_{i1} \boldsymbol{\eta}_{i1} \\ \vdots \\ c_{N1} \boldsymbol{\eta}_{N1} \end{bmatrix} + (\mathbf{H}^{-1} \otimes \mathbf{I}_6) \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_N \end{bmatrix} \otimes \dot{\mathbf{y}}_r,$$

可推出

$$\boldsymbol{\alpha}_i = -\mathbf{T}_i^{-1}(\mathbf{q}_i) \left(\frac{c_{i1}}{d_i} \boldsymbol{\eta}_{i1} - \frac{b_i}{d_i} \dot{\mathbf{y}}_r \right) + \frac{\mathbf{T}_i^{-1}(\mathbf{q}_i)}{d_i} \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{T}_j(\mathbf{q}_j) \boldsymbol{\alpha}_j. \quad (6)$$

将式(6)代入式(5), 可得

$$\dot{V}_{i1} = -c_{i1} \boldsymbol{\eta}_{i1}^T \boldsymbol{\eta}_{i1} + d_i \boldsymbol{\eta}_{i1}^T \mathbf{T}_i(\mathbf{q}_i) (\mathbf{v}_i - \boldsymbol{\alpha}_i) - \boldsymbol{\eta}_{i1}^T \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{T}_j(\mathbf{q}_j) (\mathbf{v}_j - \boldsymbol{\alpha}_j), \quad (7)$$

其中, $c_{i1} > 0 (i = 1, 2, \dots, N)$ 为待定参数。

第2步: 定义 $\boldsymbol{\eta}_{i2} = \mathbf{v}_i - \boldsymbol{\alpha}_i$, 选取 $V_i = V_{i1} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\eta}_{i2}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\eta}_{i2}$, 由式(7)可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & -c_{i1} \boldsymbol{\eta}_{i1}^T \boldsymbol{\eta}_{i1} + d_i \boldsymbol{\eta}_{i1}^T \mathbf{T}_i(\mathbf{q}_i) (\mathbf{v}_i - \boldsymbol{\alpha}_i) - \boldsymbol{\eta}_{i1}^T \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{T}_j(\mathbf{q}_j) (\mathbf{v}_j - \boldsymbol{\alpha}_j) + \boldsymbol{\eta}_{i2}^T \boldsymbol{\xi}_i + \\ & \boldsymbol{\eta}_{i2}^T (\mathbf{u}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{v}_i) \mathbf{v}_i - \mathbf{K}\mathbf{v}_i - \mathbf{G}_i(\mathbf{q}_i) - \mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_i). \end{aligned} \quad (8)$$

根据 Young 不等式, 得到

$$\begin{aligned} d_i \boldsymbol{\eta}_{i1}^T \mathbf{T}_i(\mathbf{q}_i) (\mathbf{v}_i - \boldsymbol{\alpha}_i) & \leq \frac{1}{2} d_i |\boldsymbol{\eta}_{i1}|^2 + \frac{1}{2} d_i \|\mathbf{T}_i(\mathbf{q}_i)\|^2 |\boldsymbol{\eta}_{i2}|^2, \boldsymbol{\eta}_{i2}^T \boldsymbol{\xi}_i \leq \beta |\boldsymbol{\eta}_{i2}|^2 + \frac{1}{4\beta} |\boldsymbol{\xi}_i|^2, \\ \boldsymbol{\eta}_{i1}^T \sum_{j=1}^N a_{ij} \mathbf{T}_j(\mathbf{q}_j) (\mathbf{v}_j - \boldsymbol{\alpha}_j) & \leq \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N a_{ij} |\boldsymbol{\eta}_{i1}|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N a_{ij} \|\mathbf{T}_j(\mathbf{q}_j)\|^2 |\boldsymbol{\eta}_{i2}|^2, \end{aligned}$$

其中, $\beta > 0$ 是任意常数。因此,得到

$$\dot{V}_i \leq - \left(c_{i1} - \frac{1}{2}d_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N a_{ij} \right) |\boldsymbol{\eta}_{i1}|^2 + \boldsymbol{\eta}_{i2}^T \left(\mathbf{u}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{v}_i) \mathbf{v}_i - \mathbf{K} \mathbf{v}_i - \mathbf{G}_i(\mathbf{q}_i) - \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_i + \beta \boldsymbol{\eta}_{i2} + \frac{1}{2}d_i \|\mathbf{T}_i(\mathbf{q}_i)\|^2 \boldsymbol{\eta}_{i2} \right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N a_{ij} \|\mathbf{T}_j(\mathbf{q}_j)\|^2 |\boldsymbol{\eta}_{j2}|^2 + \frac{1}{4\beta} |\boldsymbol{\xi}_i|^2. \quad (9)$$

引入 $V = \sum_{i=1}^N V_i$, 结合式(9)可得

$$\dot{V} \leq - \sum_{i=1}^N \left(c_{i1} - \frac{1}{2}d_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N a_{ij} \right) |\boldsymbol{\eta}_{i1}|^2 + \sum_{i=1}^N \boldsymbol{\eta}_{i2}^T \left(\mathbf{u}_i - \mathbf{C}_i(\mathbf{v}_i) \mathbf{v}_i - \mathbf{K} \mathbf{v}_i - \mathbf{G}_i(\mathbf{q}_i) - \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_i + \beta \boldsymbol{\eta}_{i2} + \frac{1}{2}d_i \|\mathbf{T}_i(\mathbf{q}_i)\|^2 \boldsymbol{\eta}_{i2} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N a_{ji} \|\mathbf{T}_j(\mathbf{q}_j)\|^2 \boldsymbol{\eta}_{j2} \right) + \frac{N}{4\beta} |\boldsymbol{\xi}|^2.$$

选取实际控制器

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{C}_i(\mathbf{v}_i) \mathbf{v}_i + \mathbf{K} \mathbf{v}_i + \mathbf{G}_i(\mathbf{q}_i) + \mathbf{M} \dot{\mathbf{x}}_i - \beta \boldsymbol{\eta}_{i2} - \frac{1}{2}d_i \|\mathbf{T}_i(\mathbf{q}_i)\|^2 \boldsymbol{\eta}_{i2} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N a_{ji} \|\mathbf{T}_j(\mathbf{q}_j)\|^2 \boldsymbol{\eta}_{j2} - c_{i2} \boldsymbol{\eta}_{i2}, \quad (10)$$

使得

$$\dot{V} \leq - \sum_{i=1}^N \left(c_{i1} - \frac{1}{2}d_i - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N a_{ij} \right) |\boldsymbol{\eta}_{i1}|^2 - \sum_{i=1}^N c_{i2} |\boldsymbol{\eta}_{i2}|^2 + \frac{N}{4\beta} |\boldsymbol{\xi}|^2, \quad (11)$$

其中, $c_{i2} > 0 (i = 1, 2, \dots, N)$ 为待定参数。

通过式(11)进一步可得

$$\dot{V} \leq -c_0 V + \frac{N}{4\beta} |\boldsymbol{\xi}|^2, \quad (12)$$

其中, $c_0 = \min_{1 \leq i \leq N} \left\{ 2c_{i1} - d_i - \sum_{j=1}^N a_{ij}, 2c_{i2} \right\}$ 。

注2 与受二阶矩过程扰动的单个飞艇系统^[6]的设计方法相比,本文利用反推法设计的控制器可以有效地处理多个飞艇系统中跟随者、领导者间的信息交互。

3.2 稳定性分析

定理1 考虑系统(3),若假设1~5成立,选取控制器(10),且 $c_{i1} > \frac{1}{2}d_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N a_{ij}, c_{i2} > 0$, 则有以下结论成立:

- 1) 闭环系统的解存在且唯一;
- 2) 闭环系统的所有信号是依概率有界的;
- 3) 对任意 $\varepsilon > 0$, 初值 $\mathbf{q}(t_0) = (\mathbf{q}_1^T(t_0), \mathbf{q}_2^T(t_0), \dots, \mathbf{q}_N^T(t_0))^T, \mathbf{v}(t_0) = (\mathbf{v}_1^T(t_0), \mathbf{v}_2^T(t_0), \dots, \mathbf{v}_N^T(t_0))^T$, 存在常数 $T(\mathbf{q}(t_0), \mathbf{v}(t_0), \varepsilon)$, 使得

$$E |\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{y}_r(t)|^2 < \varepsilon, \forall t > T(\mathbf{q}(t_0), \mathbf{v}(t_0), \varepsilon), i = 1, 2, \dots, N.$$

证明 定义 $\boldsymbol{\eta} = (\boldsymbol{\eta}_{11}^T, \boldsymbol{\eta}_{12}^T, \dots, \boldsymbol{\eta}_{N1}^T, \boldsymbol{\eta}_{N2}^T)^T$, 引入 $\sigma_k = \inf \{ t \geq t_0 : |\boldsymbol{\eta}(t)| > k \}, \inf \emptyset = \infty$ 。

由式(12)可得

$$EV(\boldsymbol{\eta}(t \wedge \sigma_k)) - V(\boldsymbol{\eta}(t_0)) \leq -c_0 E \int_{t_0}^{t \wedge \sigma_k} V(\boldsymbol{\eta}(s)) ds + \frac{N}{4\beta} E \int_{t_0}^t |\boldsymbol{\xi}(s)|^2 ds. \quad (13)$$

由 V 的定义、假设1和式(13)可得

$$EV(\boldsymbol{\eta}(t \wedge \sigma_k)) \leq V(\boldsymbol{\eta}(t_0)) + \frac{NK}{4\beta} (t - t_0). \quad (14)$$

由式(14)和引理1可知,闭环系统在 $[t_0, \infty)$ 上存在唯一解。因此,结论1)成立。

利用式(14)、Fatou引理,以及 $\sigma_\infty = \infty$ 几乎处处成立,得到

$$EV(\boldsymbol{\eta}(t)) = E \left(\liminf_{k \rightarrow \infty} V(\boldsymbol{\eta}(t \wedge \sigma_k)) \right) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} E \left(V(\boldsymbol{\eta}(t \wedge \sigma_k)) \right) \leq$$

$$V(\boldsymbol{\eta}(t_0)) + \frac{NK}{4\beta}(t - t_0) < \infty, \quad (15)$$

由假设1、式(12)和(15),可得

$$V(\boldsymbol{\eta}(t)) < \infty, \dot{V}(\boldsymbol{\eta}(t)) < \infty. \quad (16)$$

进一步利用式(15)、(16)和文献[16]中富比尼定理,可得

$$\int_{t_1}^t E\dot{V}(\boldsymbol{\eta}(s))ds = E\int_{t_1}^t \dot{V}(\boldsymbol{\eta}(s))ds = EV(\boldsymbol{\eta}(t)) - EV(\boldsymbol{\eta}(t_1)). \quad (17)$$

设 $v(t) = EV(\boldsymbol{\eta}(t))$, 由式(12)、(17)和假设1得到

$$\dot{v}(t) \leq -c_0v + \frac{N}{4\beta}E|\boldsymbol{\xi}_i|^2 \leq -c_0v + \frac{N}{4\beta}K. \quad (18)$$

利用引理3,由式(18)可得

$$EV(\boldsymbol{\eta}(t)) \leq e^{-c_0(t-t_0)} EV(\boldsymbol{\eta}(t_0)) + \frac{NK}{4c_0\beta}(1 - e^{-c_0(t-t_0)}). \quad (19)$$

接下来进行结论3)的证明。定义 $\boldsymbol{\eta}_1 = (\boldsymbol{\eta}_{11}^T, \boldsymbol{\eta}_{21}^T, \dots, \boldsymbol{\eta}_{N1}^T)^T$, $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1^T, \mathbf{y}_2^T, \dots, \mathbf{y}_N^T)^T$ 。由式(19)可得

$$E|\boldsymbol{\eta}_1|^2 \leq 2 \left[e^{-c_0(t-t_0)} EV(\boldsymbol{\eta}(t_0)) + \frac{NK}{4c_0\beta}(1 - e^{-c_0(t-t_0)}) \right], \quad (20)$$

由 $\boldsymbol{\eta}_{11}, \boldsymbol{\eta}_{21}, \dots, \boldsymbol{\eta}_{N1}$ 的定义可得

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \left[\sum_{j=1}^N a_{1j}(\mathbf{y}_1^T - \mathbf{y}_j^T) + b_1(\mathbf{y}_1^T - \mathbf{y}_r^T), \dots, \sum_{j=1}^N a_{Nj}(\mathbf{y}_N^T - \mathbf{y}_j^T) + b_N(\mathbf{y}_N^T - \mathbf{y}_r^T) \right]^T = (\mathbf{H} \otimes \mathbf{I}_6) [\mathbf{y} - (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{y}_r)]. \quad (21)$$

根据假设4、引理2,由式(20)和(21)可得

$$E|\mathbf{y} - (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{y}_r)|^2 \leq 2|\mathbf{H}^{-1} \otimes \mathbf{I}_6|^2 \left[e^{-c_0(t-t_0)} EV(\boldsymbol{\eta}(t_0)) + \frac{NK}{4c_0\beta}(1 - e^{-c_0(t-t_0)}) \right]. \quad (22)$$

利用 c_0 和 β 的定义、式(22),则对任意 $\varepsilon > 0$ 和 $\mathbf{q}_i(t_0), \mathbf{v}_i(t_0)$, 通过选择 c_{i1}, c_{i2} 和 β , 存在有限时间 $T(\mathbf{q}(t_0), \mathbf{v}(t_0), \varepsilon)$, 使得

$$E|\mathbf{y}_i(t) - \mathbf{y}_r(t)|^2 \leq E|\mathbf{y} - (\mathbf{1}_N \otimes \mathbf{y}_r)|^2 < \varepsilon, \forall t > T(\mathbf{q}(t_0), \mathbf{v}(t_0), \varepsilon), i = 1, 2, \dots, N.$$

因此,结论3)成立。

下一步进行结论2)的证明。由式(19)可得

$$EV(\boldsymbol{\eta}(t)) \leq EV(\boldsymbol{\eta}(t_0)) + \frac{NK}{4c_0\beta}, \quad (23)$$

其中

$$EV(\boldsymbol{\eta}) \geq \int_{|\boldsymbol{\eta}|>c} V(\boldsymbol{\eta}) P(d\mathbf{w}) \geq \inf_{|\boldsymbol{\eta}|>c} V(\boldsymbol{\xi}_i) P(|\boldsymbol{\eta}| > c). \quad (24)$$

综合式(23)和(24)可得

$$P(|\boldsymbol{\eta}| > c) \leq \frac{EV(\boldsymbol{\eta}(t_0)) + \frac{NK}{4c_0\beta}}{\inf_{|\boldsymbol{\eta}|>c} V(\boldsymbol{\eta})}. \quad (25)$$

由 $V(\boldsymbol{\eta})$ 的定义和式(25)可得

$$\limsup_{c \rightarrow \infty} P(|\boldsymbol{\eta}| > c) \leq \limsup_{c \rightarrow \infty} \frac{EV(\boldsymbol{\eta}(t_0)) + \frac{NK}{4c_0\beta}}{\inf_{|\boldsymbol{\eta}|>c} V(\boldsymbol{\eta})} = 0. \quad (26)$$

利用式(21)、(26)和定义1可得,闭环系统的状态依概率有界。因此,结论2)成立。

注3 由式(8)~(14)可以看出,控制器设计和稳定性分析仅使用了二阶矩过程 $\boldsymbol{\xi}$ 的上界 K 。在满

足假设 1 的前提下,利用本文提出的设计方法,可将结果推广到跟随者有不同二阶矩过程的情况。

4 仿真例子

考虑有向拓扑结构 \bar{G} (图 1),其中,第 $i(i = 1, 2, 3)$ 个跟随者的动态形式由方程(3) 描述,领导者的

输出信号为 $y_r(t) = \left(\sin t, \cos t, \frac{1}{1+t}, \sin t, \frac{1}{2}e^{-t}, e^{-t} \right)^T$ 。由图 1 可得, $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

在仿真实验中,控制器(10)中的参数取为

$$c_{11} = 1, c_{12} = 0.9, c_{21} = 0.6, c_{22} = 0.4, c_{31} = 0.5, c_{32} = 0.2, \beta = 0.1;$$

初值取为:

$$\begin{aligned} q_1(0) &= (0.2, 0.3, 0.6, 0.4, -0.1, 0.2)^T, \\ v_1(0) &= (0.2, 0.1, 0.5, 0.5, 0.14, 0.1)^T, \\ q_2(0) &= (0.1, -1.5, 0.1, 0.15, -0.1, 0.1)^T, \\ v_2(0) &= (0.3, 0.15, 1, 0.2, 0.26, 0.1)^T, \\ q_3(0) &= (-0.4, -0.5, 0.4, 0.7, 0.2, 0.6)^T, \\ v_3(0) &= (1, 0.6, 0.2, 0.4, 0.2, 0.3)^T. \end{aligned}$$

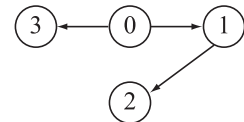


图 1 有向拓扑 \bar{G}
Fig.1 Directed topology \bar{G}

跟踪误差和控制器响应曲线分别如图 2、3 所示。由图 2 可知,当 $t > 5$ s 时,跟踪误差满足 $|e_{ij}| < 0.1$, $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, \dots, 6$; 由图 3 可知,控制器信号保持有界。因此,本文控制方案的有效性得到验证。

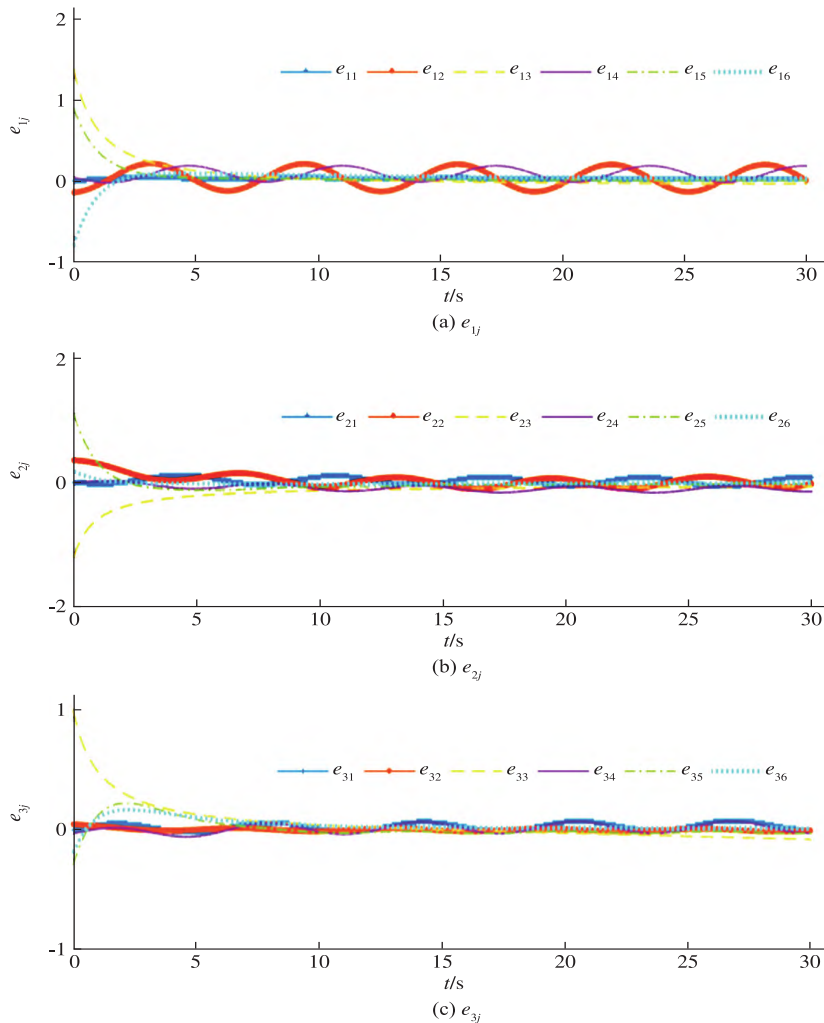


图 2 跟踪误差响应曲线

Fig.2 The tracking errors response curves

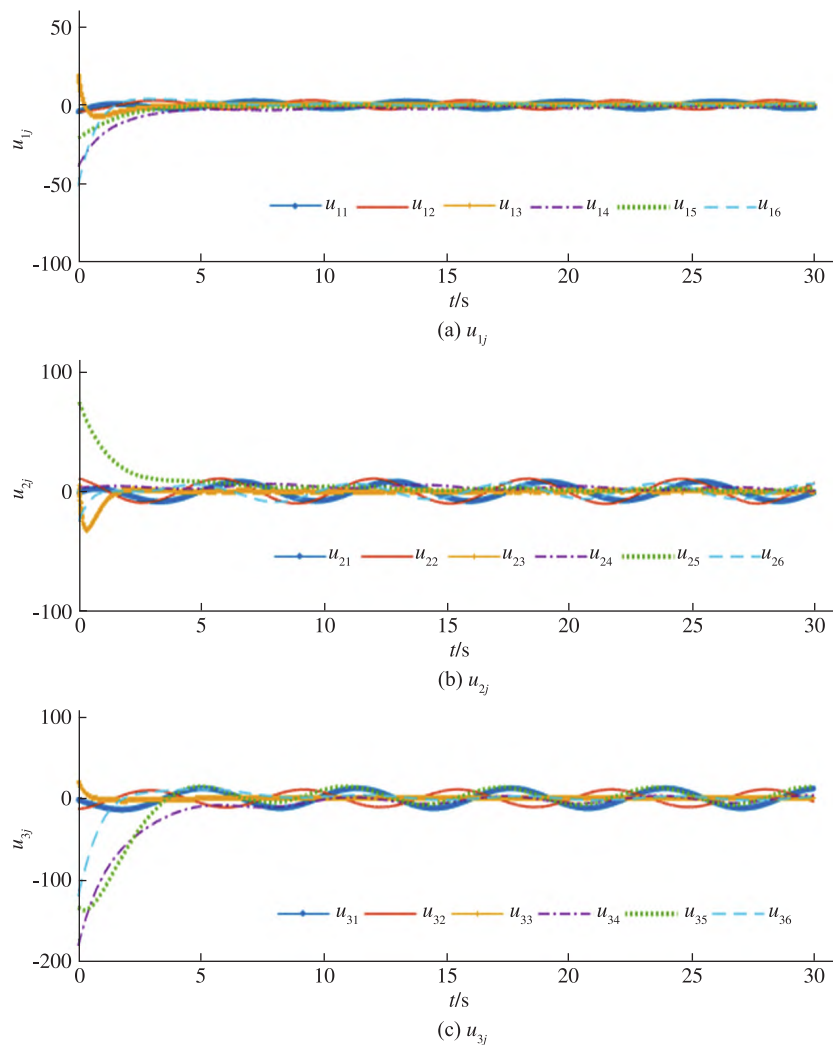


图 3 控制器响应曲线

Fig.3 The controllers response curves

5 结论

本文利用反推法研究了受二阶矩过程干扰的多个飞艇系统的均方协同跟踪控制问题。所设计的控制器能够保证闭环系统所有信号是依概率有界的,并且领导者与跟随者输出跟踪误差的均方可以调节到任意小。时变拓扑下多自主体系统的均方协同跟踪控制问题是近年来的研究热点之一,未来的工作是研究受二阶矩过程干扰的多个飞艇系统在时变拓扑下的协同控制问题。

参考文献:

- [1] LEE S, LEE H, WON D, et al. Backstepping approach of trajectory tracking control for the mid-altitude unmanned airship [C]// AIAA Guidance, Navigation and Control Conference and Exhibit, 2007.
- [2] ZHOU G, CHEN L, DONG Q. Modeling and analysis of moving-mass actuated statospheric airship[J]. High Technology Letters, 2013, 19(2): 145-149.
- [3] AZINHEIRA J R, MOUTINHO A, DE PAIVA E C. Airship hover stabilization using a backstepping control approach[J]. Journal of Guidance, Control and Dynamics, 2006, 29(4): 903-914.
- [4] ZHU E L, PANG J F, SUN N. Airship horizontal trajectory tracking control based on active disturbance rejection control (ADRC)[J]. Nonlinear Dynamics, 2014, 75(4): 725-734.

- [5] WANG H, LI W Q, TANG M Q. Distributed output tracking of nonlinear multi-agent systems perturbed by second-order moment processes [J]. *Neurocomputing*, 2021, 452: 789–795.
- [6] HU Y, WU Z J, ZHANG D F, et al. Random trajectory tracking for low altitude airship [C] // *The 31st Chinese Control and Decision Conference*, 2019.
- [7] HU J P, HONG Y G. Leader-following coordination of multi-agent systems with coupling time delays [J]. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2007, 374(2): 853–863.
- [8] ZHU W, CHENG D Z. Leader-following consensus of second-order agents with multiple time-varying delays [J]. *Automatica*, 2010, 46(12): 1994–1999.
- [9] LI W Q, LIU L, FENG G. Cooperative control of multiple stochastic high-order nonlinear systems [J]. *Automatica*, 2017, 82: 218–225.
- [10] LI W Q, LIU L, FENG G. Cooperative control of multiple nonlinear benchmark systems perturbed by second-order moment processes [J]. *IEEE Transactions on Cybernetics*, 2020, 50(3): 902–910.
- [11] AZINHEIRA J R, MOUTINHO A. Hover control of an UAV with backstepping design including input saturations [J]. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2008, 16(3): 517–526.
- [12] LI Y W, NAHON M Y. Modeling and simulation of airship dynamics [J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2007, 30(6): 1691–1700.
- [13] ZHENG Z W, HUO W. Planar path following control for stratospheric airship [J]. *IET Control Theory and Applications*, 2013, 7(2): 185–201.
- [14] KRSTIC M, DENG H. *Stabilization of uncertain nonlinear systems* [M]. London: Springer, 1998.
- [15] WU Z J. Stability criteria of random nonlinear systems and their applications [J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2015, 60(4): 1038–1049.
- [16] KLEBANER F C. *Introduction to stochastic calculus with applications* [M]. London: Imperial College Press, 1998.

Mean-square Cooperative Tracking Control of Multiple Airships

WANG Cheng, LI Wuquan

(School of Mathematics and Statistics Science, Ludong University, Yantai 264039, China)

Abstract: The mean-square cooperative tracking control problem of multiple airships systems with second-order moment processes is studied and a new controller design scheme is proposed in this paper. Firstly, the stochastic system model of airship was obtained by modeling in the mixed coordinate system. By combining backstepping method and graph theory, new cooperative controllers with adjustable parameters were designed to ensure that all the signals of the closed-loop system are bounded in probability. In addition, the mean-square of the tracking errors between the followers' output and the leader's output can be made arbitrarily small. Finally, the effectiveness of the designed control scheme was verified by a simulation example.

Keywords: multiple airships systems; mean-square cooperative tracking control; second-order moment processes

(责任编辑 顾建忠)