鲁东大学学报(自然科学版)
Journal of Ludong University(Natural Science Edition) 2023,39(4):352—359

Doi:10.20062/j.cnki.CN 37-1453/N.2023.04.009

连续发酵过程分数阶非线性时滞最优控制

纪 燕[1],翟金刚[1],冯恩民[2]

(1.鲁东大学 数学与统计科学学院,山东 烟台 264039;2.大连理工大学 数学科学学院,辽宁 大连 116024)

摘要:针对连续发酵甘油转化1,3-丙二醇(1,3-PD)的过程可能存在的时滞现象,考虑用分数阶时滞系统描述发酵过程,讨论系统状态关于参数的灵敏度。以甘油稀释速率和注入浓度为优化变量,以使灵敏度函数值较小为约束条件,以及使终端时刻1,3-PD浓度最大为性能指标,构建分数阶时滞系统最优控制模型。利用协态方法,得到性能指标和约束关于优化变量及参数的梯度,构造了基于序列二次规划(SQP)方法的优化算法。数值结果验证了优化策略的有效性。

关键词:分数阶导数;最优控制;时滞;连续发酵

中图分类号:O224 **文献标志码**:A **文章编号**:1673-8020(2023)04-0352-08

分数阶系统可以表示许多机械和生物动力学行为[1—2],如记忆功能、遗传特征、扩散和粘塑性[3—4],在数学、工程等领域吸引了许多研究者的关注[5—6]。时滞系统出现在许多实际工程问题中[7—8],能够更好地描述系统演化过程,根据一组给定实验数据估计未知的时滞是研究的关键问题之一[9—10]。相比整数阶最优控制,分数阶最优控制理论和应用起步较晚。Aghayan 等[11]通过构建 Lyapunov-Krasovskii(LK)函数,讨论了执行器饱和条件下分数阶时滞系统的稳定性。Chen 等[12]基于 Caputo 导数提出了具有时滞系统的 SEIR 传染病模型,并讨论系统的分岔及病变时的平衡条件。Heydari 等[13]研究 HIV/AIDS 与疟疾合并感染的变阶分数阶时滞系统的最优控制问题,并构造 Grünwald-Letnikov 非标准有限差分格式求解分数阶系统。Chen 等[14]利用 Dickson 多项式处理分数阶时滞系统,采用直接轨迹优化方法求解问题。Hassani 等[15]考虑癌症治疗模型的非线性分数阶最优控制,采用广义移位勒让德多项式逼近最优控制问题的数值解。

本文用分数阶时滞系统描述连续发酵甘油转化1,3-PD的过程。考虑到甘油稀释速率和注入浓度对系统参数可能存在影响,讨论了分数阶意义下系统状态关于参数的灵敏度;为提高目标产物,以甘油稀释速率和注入浓度为优化变量,以使终端时刻1,3-PD浓度最大为性能指标,使灵敏度函数值较小为约束条件,构建分数阶非线性时滞系统连续发酵最优控制模型;进一步给出性能指标和约束关于优化变量及参数的梯度公式,构造基于SQP方法的优化算法。经过数值计算得到的终端时刻目标产物高于已有研究结果,验证了本文所提优化策略的有效性。

1 预备知识

设 $I=[a,b]\ (-\infty\leqslant a<b<+\infty)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的有限区间,$f(t)\ (t\in I)$ 为给定函数。

定义1 给定 $\alpha>0$,f 在 I 上的 Riemann-Liouville 意义下的左、右分数阶积分分别表示为:

$$ {}_aI_t^\alpha f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\ {}_tI_b^\alpha f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^b(\tau-t)^{\alpha-1}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau, $$

其中,$\Gamma(\cdot)$ 是 Γ 函数。

收稿日期:2022-04-20;修回日期:2023-03-07

基金项目:山东省自然科学基金(ZR2014FM029)

通信作者简介:翟金刚(1973—),男,教授,硕士研究生导师,博士,研究方向为运筹与优化。E-mail:zhaijingang@hotmail.com

定义 2　给定 $\alpha > 0$，f 在 I 上的 Riemann-Liouville 意义下的左、右分数阶积分分别表示为：

$$ {}_aD_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\,d\tau, $$

$$ {}_tD_b^{\alpha} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau)\,d\tau。 $$

定义 3　给定 $\alpha > 0$，f 在 I 上的 Caputo 意义下的左、右分数阶积分分别表示为：

$$ {}_a^CD_t^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\,d\tau, $$

$$ {}_t^CD_b^{\alpha} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\,d\tau, $$

其中，$n = [\alpha] + 1$，$[\alpha]$ 是 α 的整数部分。

性质 1　令 $\alpha \in (0,1)$，$f,g \in C^1([a,b],\mathbf{R})$，则有：

$$ \int_a^b g(t)\cdot({}_a^CD_t^{\alpha} f(t))\,dt = \int_a^b f(t)\cdot({}_tD_b^{\alpha} g(t))\,dt + ({}_aI_t^{1-\alpha} g(t))\cdot f(t)\Big|_a^b, $$

$$ \int_a^b g(t)\cdot({}_t^CD_b^{\alpha} f(t))\,dt = \int_a^b f(t)\cdot({}_aD_t^{\alpha} g(t))\,dt + ({}_aI_t^{1-\alpha} g(t))\cdot f(t)\Big|_a^b。 $$

2　连续发酵分数阶时滞系统

在连续发酵实验中，持续以恒定速率将底物注入到发酵罐中，同时以相同速率将反应物流出，发酵罐中的菌群细胞始终在一种细微的振荡环境中生长，各反应物浓度不仅与当前时刻的生物量浓度有关，还与之前某一时刻的生物量浓度有关，因此，模拟发酵过程中应考虑时滞现象。根据文献[16]的相关定理与性质，采用分数阶导数直接替代整数阶导数进行建模，构造如下分数阶时滞系统：

$$ \begin{cases} {}_0^CD_t^{\alpha_1} x_1(t) = \mu x_1(t-\xi) - Ux_1, \\ {}_0^CD_t^{\alpha_2} x_2(t) = U(C_{so} - x_2) - q_2 x_1(t-\xi), t \in [0,T], \\ {}_0^CD_t^{\alpha_i} x_i(t) = q_i x_1(t-\xi) - Ux_i, i = 3,4,5, \end{cases} $$

其中：x_1 是生物量的质量浓度；x_2, x_3, x_4, x_5 分别为甘油、1,3-PD、乙酸和乙醇的物质的量浓度；ξ 是时滞量，T 是终端时刻；U 是甘油的流加速率(即稀释速率)，C_{so} 是初始甘油浓度，根据实际发酵实验，U 和 C_{so} 在不同的实验条件下可取不同的实验值，$[U, C_{so}] \in U_c := [0.08, 0.5] \times [110.96, 1883] \in \mathbf{R}^2$；细胞比生长速度 μ，底物比消耗率 q_2 和产物比生成率 $q_i(i = 3,4,5)$ 分别为[17]

$$ \mu = \mu_m \frac{x_2}{x_2 + k_s} \prod_{i=2}^{5}\left(1 - \frac{x_i}{x_i^*}\right), q_2 = m_2 + \frac{\mu}{Y_2} + \Delta_2 \frac{x_2}{x_2 + K_2}, $$

$$ q_i = m_i + \mu Y_i + \Delta_i \frac{x_2}{x_2 + K_i}, i = 3,4,5。 $$

令 $\boldsymbol{p} = (\mu_m, k_s, m_2, \cdots, m_5, K_2, \cdots, K_5, Y_2, \cdots, Y_5, \Delta_2, \cdots, \Delta_5)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{18}$ 为参数向量。参考文献[17]的辨识结果，给定参数容许集合为

$$ P = \{(p_1, p_2, \cdots, p_{18})^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{18} : p_{j_*} \leqslant p_j \leqslant p_j^*, j = 1,2,\cdots,18\}。 $$

由文献[17—18]，取时滞量 $\xi = 0.26$，阶数 $\alpha_i \in (0,1)$，$i = 1,2,\cdots,5$。阶数辨识结果见表 1。

表 1　阶数辨识结果[17]

Tab.1 The identified results for the orders

阶数	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5
结果	0.699 451	0.782 464	0.774 484	0.763 372	0.672 697

定义容许状态集为：

$$W_{ad}=\left\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^5\,\middle|\,x_i\in[x_{i_*},x_i^*],i=1,2,\cdots,5\right\},$$

其中，x_{i_*}，x_i^* 分别表示上限和下限。

令 $\boldsymbol{z}=(U,C_{so},\boldsymbol{p})\in\mathbf{R}^{20}$，定义可行集为 $\kappa:=\left\{\boldsymbol{z}\in U_c\times P\,\middle|\,\boldsymbol{x}(t|\boldsymbol{z})\in W_{ad},\forall t\in[0,T]\right\}$，则分数阶时滞系统可表示为

$$\begin{cases}{}_0^C\mathrm{D}_t^\alpha\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}_\xi(t),\boldsymbol{z}),t\in[0,T],\\ \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}^0,\end{cases}\tag{1}$$

其中，$\boldsymbol{x}^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_5^0)^{\mathrm{T}}$ 是给定的初始状态，$\boldsymbol{x}_\xi(t)=\boldsymbol{x}(t-\xi)$。

根据已有研究结果，$\boldsymbol{f}$ 满足如下条件：

(a) $\boldsymbol{f}$ 关于 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_\xi,\boldsymbol{z}$ 是 Lipschitz 连续的；

(b) 存在常数 $K>0$，使得 $\|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}_\xi(t),\boldsymbol{z})\|\leqslant K(1+\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{x}_\xi\|)$，其中 $\|\cdot\|$ 是 Euclidean 范数。

性质 2 对于任意的 $\boldsymbol{z}\in U_c\times P$，记分数阶系统(1)的解为 $\boldsymbol{x}(t|\boldsymbol{z})$，满足

$$\boldsymbol{x}(t|\boldsymbol{z})=\boldsymbol{x}_0+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^T(t-\tau)^{\alpha-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}_\xi(t),\boldsymbol{z})\mathrm{d}\tau。$$

性质 3 任给 $\boldsymbol{z}\in U_c\times P$，分数阶系统(1)的解 $\boldsymbol{x}(t|\boldsymbol{z})$ 是一致有界的，且关于 $\boldsymbol{z}$ 连续。

3 分数阶时滞最优控制模型

3.1 分数阶时滞最优控制问题

据已有研究结果显示，在相同的实验条件下，不同的甘油流加速率和注入浓度对系统参数会产生影响，导致辨识结果产生较大的偏差。因此，在优化 U 和 C_{so} 时，需要考虑它们对系统参数的影响，为此引入系统状态对参数的灵敏度。

定义 $\phi_j^i(t)=\dfrac{\partial x_i(t|\boldsymbol{z})}{\partial z_j}(i=1,2,\cdots,5,j=3,4,\cdots,20)$，满足如下辅助方程：

$$\begin{cases}{}_0^C\mathrm{D}_t^\alpha\phi_j^i(t)=\left(\dfrac{\partial f_i(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}_\xi(t),\boldsymbol{z})}{\partial\boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}\phi_j(t)+\left(\dfrac{\partial f_i(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}_\xi(t),\boldsymbol{z})}{\partial\boldsymbol{x}(t-\xi)}\right)^{\mathrm{T}}\dfrac{\partial\boldsymbol{x}(t-\xi)}{\partial z_j}+\\ \qquad\dfrac{\partial f_i(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}_\xi(t),\boldsymbol{z})}{\partial z_j},t\in[0,T],\\ \phi_j^i(0)=0,\end{cases}\tag{2}$$

由文献[17]，灵敏度函数 $\dfrac{\partial x_i(t|\boldsymbol{z})}{\partial z_j}$ 存在且连续，$\boldsymbol{x}$ 关于 $\boldsymbol{z}$ 的二阶偏导数满足：

$${}_0^C\mathrm{D}_t^\alpha\left(\frac{\partial^2x_i}{\partial z_j\partial z_s}\right)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2\boldsymbol{x}}{\partial z_j\partial z_s}+\frac{\partial}{\partial z_s}\left(\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{x}}\right)^{\mathrm{T}}\frac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial z_j}+\left(\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{x}_\xi}\right)^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2\boldsymbol{x}_\xi}{\partial z_j\partial z_s}+\frac{\partial}{\partial z_s}\left(\frac{\partial f_i}{\partial\boldsymbol{x}_\xi}\right)^{\mathrm{T}}\frac{\partial\boldsymbol{x}_\xi}{\partial z_j}+\frac{\partial^2f_i}{\partial z_j\partial z_s},\tag{3}$$

且 $\left.\dfrac{\partial^2x_i}{\partial z_j\partial z_s}\right|_{t=0}=0$。因此，为最大化目标产物，建立如下分数阶时滞系统最优控制问题：

$$\text{问题(P1)}:\begin{cases}\min J(\boldsymbol{z})=-x_3(T),\\ \text{s.t.}\left\|\dfrac{\partial x_i(T|\boldsymbol{z})}{\partial z_j}\right\|\leqslant\varepsilon,\boldsymbol{z}\in U_c\times P,\varepsilon\text{ 是充分小的常数},i=1,2,\cdots,5,j=3,4,\cdots,20。\end{cases}$$

定理 1 问题(P1)存在一个最优解 $\boldsymbol{z}^*\in U_c\times P$，使得 $J(\boldsymbol{z}^*)\leqslant J(\boldsymbol{z})$，$\forall\boldsymbol{z}\in U_c\times P$。

证明 由性质 3，分数阶时滞系统(1)的解关于 $\boldsymbol{z}$ 连续，因此，性能指标 $J(\boldsymbol{z})$ 在 $U_c\times P$ 上连续；又由于 κ 是非空紧集，由连续函数的性质，问题(P1)存在最优解。

3.2　状态约束近似转化

为显式表达状态约束,令

$$\begin{cases} g_i(\boldsymbol{x}(t|z)):=x_i(t|z)-x_i^*\leqslant 0, \\ g_{i+5}(\boldsymbol{x}(t|z)):=x_{i_*}-x_i(t|z)\leqslant 0, i=1,2,\cdots,5, \end{cases} \tag{4}$$

约束(4)等价于

$$G(z):=\sum_{i=1}^{10}\int_0^T \max\{0,g_i(\boldsymbol{x}(t|z))\}\,\mathrm{d}t=0。 \tag{5}$$

由于约束(5)不满足常规约束规范,下面使用近似平滑技术[19]进行处理。定义

$$\tilde{g}_{\varepsilon,i}(\boldsymbol{x}(t|z))=\begin{cases} 0, & g_i(\boldsymbol{x}(t|z))<-\varepsilon, \\ \dfrac{(g_i(\boldsymbol{x}(t|z))+\varepsilon)^2}{4\varepsilon}, & -\varepsilon\leqslant g_i(\boldsymbol{x}(t|z))\leqslant\varepsilon, \\ g_i(\boldsymbol{x}(t|z)), & g_i(\boldsymbol{x}(t|z))>\varepsilon, \end{cases}$$

其中,$\varepsilon>0$ 是足够小的常数。则约束(5)可以近似表示为

$$G_{\varepsilon,\gamma}(z):=\sum_{i=1}^{10}\int_0^T \tilde{g}_{\varepsilon,i}(\boldsymbol{x}(t|z))\,\mathrm{d}t-\gamma\leqslant 0,$$

其中,$\gamma>0$ 是可调参数。从而问题(P1)可近似转化为下面问题:

$$\text{问题(P2)}:\begin{cases} \min J(z)=-x_3(T), \\ \text{s.t.}\, W_{ij}(z)=\left\|\dfrac{\partial x_i(T|z)}{\partial z_j}\right\|-\varepsilon\leqslant 0, i=1,2,\cdots,5, j=3,4,\cdots,20, \\ G_{\varepsilon,\gamma}(z)\leqslant 0, z\in U_c\times P。 \end{cases}$$

性质4　问题(P1)的可行解也是问题(P2)的可行解。

证明过程详见文献[20]。

4　优化算法

4.1　梯度公式

为利用基于梯度的优化方法,下面将讨论性能指标及约束关于优化变量 z 的梯度。

定义 Hamiltonian 函数 H_w 和 $\tilde{H}_w$ 为:

$$H_w(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}_\xi(t),z,\boldsymbol{\lambda}_w(t))=\boldsymbol{\lambda}_w^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}_\xi(t),z),$$

$$\tilde{H}_w(\boldsymbol{x}(t+\xi),\boldsymbol{x}_\xi(t),z,\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_w(t))=\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_w^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t+\xi),\boldsymbol{x}_\xi(t),z)\mathrm{e}(T-t-\xi),$$

其中,$\boldsymbol{\lambda}_w(\cdot)$ 和 $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_w(\cdot)$ 分别是 $H_w(\cdot)$ 和 $\tilde{H}_w(\cdot)$ 的协态,且 $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_w(t)=\boldsymbol{\lambda}_w(t+\xi)$,$\mathrm{e}(\cdot)$ 是单位阶跃函数。下面将约束 $W_{ij}(z)$ 整合为一个函数 $W(z)$,并转化为如下形式:

$$W(z)=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=3}^{20}\left\|\frac{\partial x_i(T|z)}{\partial z_j}\right\|+\int_0^T\left[H_w(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}_\xi(t),z,\boldsymbol{\lambda}_w(t))-\boldsymbol{\lambda}_w^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}_\xi(t),z)\right]\mathrm{d}t。 \tag{6}$$

由链式法则,可得

$$\frac{\partial W(z)}{\partial z}=\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=3}^{20}\frac{\partial}{\partial z}\left(\left\|\frac{\partial x_i(T|z)}{\partial z_j}\right\|\right)+\int_0^T\left[\Delta H_w(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}_\xi(t),z,\boldsymbol{\lambda}_w(t))-\boldsymbol{\lambda}_w^{\mathrm{T}}(t)\left({}_0^C\mathrm{D}_t^\alpha\Delta\boldsymbol{x}(t)\right)\right]\mathrm{d}t, \tag{7}$$

其中,

$$\Delta H_w(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}_\xi(t),z,\boldsymbol{\lambda}_w(t))=\frac{\partial H_w}{\partial \boldsymbol{x}}\Delta\boldsymbol{x}(t)+\frac{\partial H_w}{\partial \boldsymbol{x}(t-\xi)}\Delta\boldsymbol{x}(t-\xi)+\frac{\partial H_w}{\partial z},\ \Delta\boldsymbol{x}(t)=\frac{\partial\boldsymbol{x}(t|z)}{\partial z}。$$

选择适当 $\boldsymbol{\lambda}_w(t)$ 满足下列协态方程:

$$\begin{cases} {}_t\mathrm{D}_T^{\alpha}\boldsymbol{\lambda}_w^{\mathrm{T}}(t)=\dfrac{\partial H_w(\boldsymbol{x}(t|z),\boldsymbol{x}_{\xi}(t|z),z,\boldsymbol{\lambda}_w(t))}{\partial\boldsymbol{x}}+\dfrac{\partial\widetilde{H}_w(\boldsymbol{x}(t+\xi|z),\boldsymbol{x}_{\xi}(t|z),z,\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_w(t))}{\partial\boldsymbol{x}}, \\ {}_tI_T^{1-\alpha}\boldsymbol{\lambda}_w(t)\mid_{t=T}=\displaystyle\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=3}^{20}\frac{\partial}{\partial z}\left(\left\|\frac{\partial x_i(T|z)}{\partial z_j}\right\|\right)。\end{cases} \tag{8}$$

由 H_w 和 $\widetilde{H}_w$ 的定义,可得

$$\int_0^T\frac{\partial H_w(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}_{\xi}(t),z,\boldsymbol{\lambda}_w(t))}{\partial\boldsymbol{x}(t-\xi)}\Delta\boldsymbol{x}(t-\xi)\,\mathrm{d}t=\int_0^T\frac{\partial\widetilde{H}_w(\boldsymbol{x}(t+\xi),\boldsymbol{x}_{\xi}(t),z,\tilde{\boldsymbol{\lambda}}_w(t))}{\partial\boldsymbol{x}}\Delta\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t, \tag{9}$$

由分数阶分部积分公式,可得

$$\int_0^T\boldsymbol{\lambda}_w^{\mathrm{T}}(t)\,{}_0^C\mathrm{D}_t^{\alpha}\,\Delta\boldsymbol{x}(t)\mathrm{d}t=\int_0^T\Delta\boldsymbol{x}(t)\,({}_t\mathrm{D}_T^{\alpha}\boldsymbol{\lambda}_w(t))^{\mathrm{T}}\mathrm{d}t+{}_tI_T^{1-\alpha}\boldsymbol{\lambda}_w^{\mathrm{T}}(t)\,\Delta\boldsymbol{x}\,|_0^T, \tag{10}$$

将式(8)~(10)代入式(7)中,且由于 $\Delta\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{0}$, 可得

$$\frac{\partial W(z)}{\partial z}=\int_0^T\frac{\partial H_w(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}_{\xi}(t),z,\boldsymbol{\lambda}_w(t))}{\partial z}\mathrm{d}t。\tag{11}$$

同理,选取适合协态 $\boldsymbol{\lambda}(t)$ 和 $\boldsymbol{\lambda}_w(t)$,类似得到性能指标 $J(z)$ 和约束函数 $G_{\varepsilon,\gamma}$ 关于 z 的梯度,其中:

$$\frac{\partial J(z)}{\partial z}=\int_0^T\frac{\partial H_w(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}_{\xi}(t),z,\boldsymbol{\lambda}_w(t))}{\partial z}\mathrm{d}t, \tag{12}$$

$$\frac{\partial G_{\varepsilon,\gamma}(z)}{\partial z}=\int_0^T\frac{\partial\widetilde{H}_w(\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}_{\xi}(t),z,\boldsymbol{\lambda}_w(t))}{\partial z}\mathrm{d}t。\tag{13}$$

4.2 数值算法

利用 4.1 节的梯度公式,下面构造一个基于 SQP 方法的优化算法,具体步骤如下:

1) 给定参数 $z\in U_{\mathrm{c}}\times P,\varepsilon>0,\gamma>0$ 的初值,且设定 $\bar{\varepsilon},\bar{\gamma}$ 为参数 ε,γ 的临界值, $\beta_1,\beta_2\in(0,1)$ 为比例折减系数。

2) 利用 G-L 方法[21] 以及分数阶短存储原理[22] 计算式(1)~(3)、(10),得到状态方程、灵敏度函数 $\dfrac{\partial x_i(t|z)}{\partial z_j}$ 和 $\dfrac{\partial^2 x_i}{\partial z_j\partial z_s}$ 对应的协态方程的数值解;进一步应用式(11)~(13)分别计算性能指标、约束关于 z 的梯度。

3) 采用 SQP 方法求解最优参数 z。若不符合 SQP 停机准则,可转至步骤 2);否则,直接输出最优解 $z^{\varepsilon,\gamma*}$。

4) 检查 $G(z^{\varepsilon,\gamma*})=0$ 的可行性。若 $G(z^{\varepsilon,\gamma*})=0$ 可行,转步骤 5);若 $G(z^{\varepsilon,\gamma*})=0$ 不可行,令 $\gamma:=\beta_1\gamma$。若 $\gamma\leqslant\bar{\gamma}$,得到了异常解;否则,转步骤 2)。

5) 令 $\varepsilon:=\beta_2\varepsilon,\gamma:=\beta_2\gamma$。若 $\varepsilon\leqslant\bar{\varepsilon}$,转步骤 2);否则输出 $z^*=z^{\varepsilon,\gamma*}$,即得到最优解 $J(z^*)$ 及 z^*。

5 数值结果

依据发酵实验原理进行操作,给定初值条件为 $\boldsymbol{x}^0=(0.405,440.8578,0,0,0)^{\mathrm{T}}$, 发酵终止时间 $T=70$ h。应用算法数值求解时,选取步长为 1/3600,利用分数阶短存储原理得到节点数 $n=600$,且 SQP 粒子数为 288, 其他参数取值详见表 2。以C++为编程语言,在并行机上完成了 8 次数值试验,平均耗时 5 h/次,试验得到优化的甘油流速率为 0.08,优化的甘油初始浓度为 703.371 mmol · L^{-1},并由此得到终端时刻 1,3-PD 浓度为 772.843 mmol · L^{-1}。最优参数的辨识结果详见表 3,反应器中的各物质随时间变化曲线详见图 1、2。相比文献[23]的最大浓度 710.1 mmol · L^{-1},本文的结果优于文献[23]。由图 1、2 可以看出,发酵初期各物质浓度比较震荡,后期趋于稳定,与实际发酵过程比较吻合,显示了数值模拟结果的可参考性。

表 2　参数取值

Tab.2 Parameters values

参数	$\bar{\varepsilon}$	$\bar{\gamma}$	β_1	β_2	M_{sup}	M_{iter}	w_{max}	w_{min}	c_1	c_2
取值	1.0×10^{-8}	1.0×10^{-7}	0.5	0.1	5×10^{7}	300	0.9	0.4	2.0	2.0

表 3　参数辨识结果

Tab.3 The identified results for the parameters

参数	μ_m	k_s	m_2	Y_2	Δ_2	K_2	m_3	Y_3	Δ_3
结果	0.704 814	0.350 162	1.226 5	0.012 012 8	27.417 8	12.987 8	−2.896 99	87.863 3	31.156 5
参数	K_3	m_4	Y_4	Δ_4	K_4	m_5	Y_5	Δ_5	K_5
结果	22.365 8	−0.865 612	18.423 1	8.079 09	72.000 9	6.446 31	16.474 9	0.333 15	−0.068 669 6

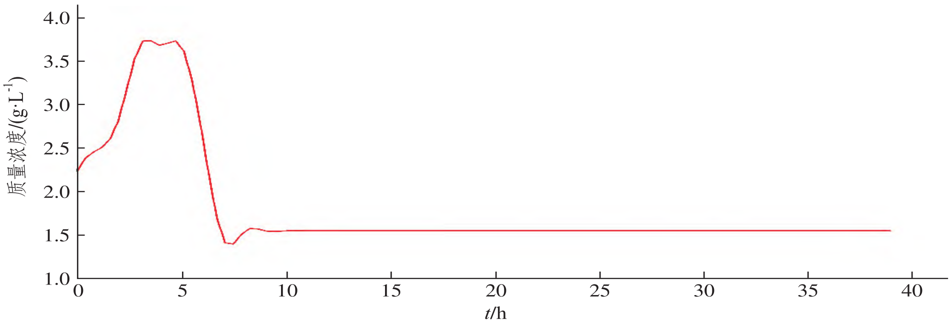
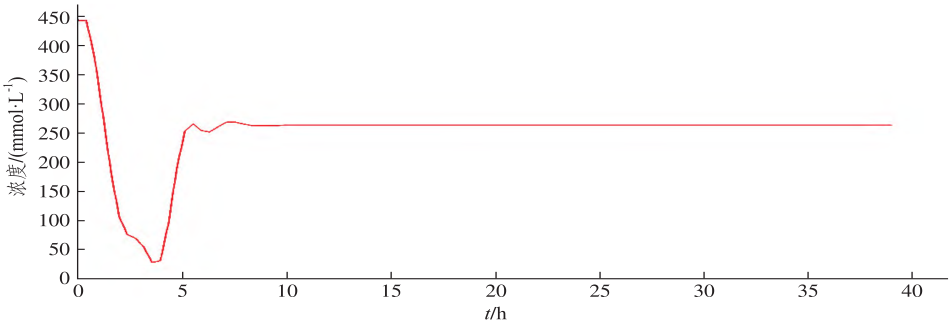
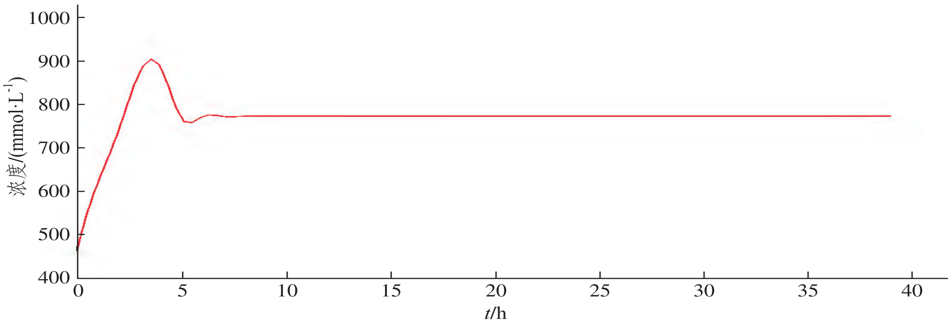


图 1　生物量的质量浓度变化曲线

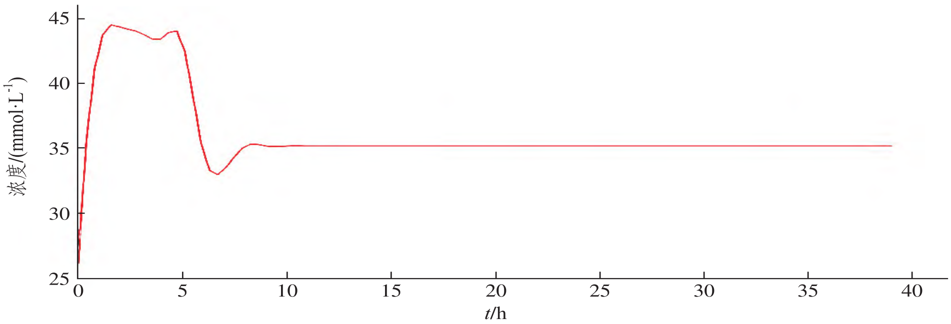
Fig.1 The curve of mass concentration of biomass



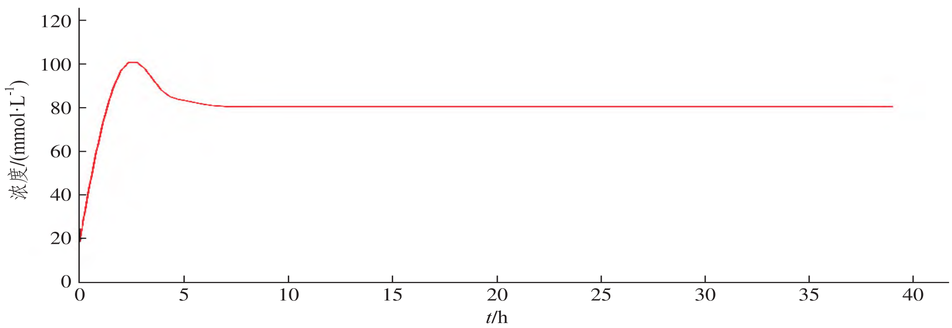
(a) 胞外甘油



(b) 1,3-PD



(c) 乙酸



(d) 乙醇

图 2 各物质的浓度变化曲线

Fig.2 The curves of the concentration of each substance

6 结论

本文针对微生物连续发酵生产 1,3-PD 过程,通过引入分数阶微积分思想,建立新的分数阶非线性时滞系统模型。为使终端时刻 1,3-PD 浓度最大,以参数的灵敏度函数为约束,以甘油的流加速率和初始注入浓度为控制变量,构造了连续发酵分数阶时滞系统的最优控制模型,并利用 SQP 算法,通过优化计算得到最优流加策略,为实际发酵过程提供参考。

参考文献:

[1] FREED A D,DIETHELM K.Fractional calculus in biomechanics:a 3D viscoelastic model using regularized fractional derivative kernels with application to the human calcaneal fat pad[J].Biomech Model Mechanobiol,2006,5(4):203-215.

[2] SHITIKOVA R M V.Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics:novel trends and recent results[J].Applied Mechanics Reviews,2010,63(1):1-52.

[3] MAINARDI F.Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity (an introduction to mathematical models) waves in linear viscoelastic media:asymptotic representations[J].Imperial College Press,2010,1142(614):109-135.

[4] AHMADIAN A,ISMAIL F,SALAHSHOUR S.Uncertain viscoelastic models with fractional order:a new spectral tau method to study the numerical simulations of the solution[J].Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,2017,53:44-64.

[5] IONESCU C,LOPES A,COPOT D.The role of fractional calculus in modelling biological phenomena:a review[J].Communications in Nonlinear Science & Numerical Simulation,2017,51:141-159.

[6] AGARWAL R P,BALEANU B,NIETO J J,et al.A survey on fuzzy fractional differential and optimal control nonlocal evolution equations[J].Journal of Computational and Applied Mathematics,2018,339(1):3-29.

[7] GAO C,LIU X,YANG Y H,et al.Event-triggered finite-time adaptive neural control for nonlinear non-strict-feedback time-delay systems with disturbances[J].Information Sciences,2020,536:1-24.

[8] CHENG Y Y,HUO L A,ZHAO L J.Dynamical behaviors and control measures of rumor-spreading model in consideration of the infected media and time delay[J].Information Sciences,2021,564(3):237-253.

[9] GÖLLMANN L,KERN D,MAURER H.Optimal control problems with delays in state and control variables subject to mixed control-state constraints[J].Optimal Control Applications & Methods,2010,30(4):341-365.

[10] WANG L Y,GUI W H,TEO K L,et al.Optimal control problems arising in the zinc sulphate electrolyte purification process [J].Journal of Global Optimization,2012,54(2):307-323.

[11] AGHAYAN Z S,ALFI A,MACHADO J.Stability analysis of uncertain fractional-order neutral-type delay systems with actuator saturation[J].Frontiers of Information Technology Electronic Engineering,2021,22(10):1402-1413.

[12] CHEN Y,ZHOU B,SONG Q K.The passivity of fractional delay complex neural networks with uncertainty[J].Applied Mathematics and Mechanics,2021,42(5):492-499.

[13] HEYDARI M H,RAZZAGHI M.Piecewise Chebyshev cardinal functions:application for constrained fractional optimal control problems[J].Chaos Solitons & Fractals,2021,150(1):111-118.

[14] CHEN S B,SORADI-ZEID S,ALIPOUR M,et al.Optimal control of nonlinear time-delay fractional differential equations with Dickson polynomials[J].Fractals,2021,29(4):1-16.

[15] HASSANI H,MACHADO J A T,MEHRABI S.An optimization technique for solving a class of nonlinear fractional optimal control problems:application in cancer treatment[J].Applied Mathematical Modelling,2021,93(3):868-884.

[16] TEO K L,ENNINGS L S,LEE H,et al.The control parameterization enhancing transform for constrained optimal control problems[J].The Anziam Journal,1999,40(3):314-335.

[17] WANG D N,ZHAI J G,FENG E M.Fractional order modeling and parameter identification for a class of continuous fermentation[J].Journal of System Science and Mathematical Science,2020,40(9):1517-1530.

[18] 孙菁.微生物连续发酵非线性动力系统的最优控制[D].大连:大连理工大学,2018.

[19] DUMITRU B, KAI S, ENRICO S, et al. Fractional calculus models and numerical methods [M]. Singapore: World Scientific,2016.

[20] TEO K L,GOH C J,WONG K H.A unified computational approach to optimal control problems[M].Harlow Essex:Longman Scientific and Technical,1991.

[21] SALATI A B,SHAMSI M,DELFIM F M.Direct transcription methods based on fractional integral approximation formulas for solving nonlinear fractional optimal control problems[J].Communications in Nonlinear Science Numerical Simulation, 2018,67(2019):334-350.

[22] DENG W H.Short memory principle and a predictor-corrector approach for fractional differential equations[J].Journal of Computational and Applied Mathematics,2007,206(1):174-188.

[23] ZHAI J G,JIANG G M,YE J X.Optimal dilution strategy for a microbial continuous culture based on the biological robustness[J].Numerical Algebra,Control and Optimization,2015,5(1):59-69.

Optimal Control of Fractional Nonlinear Time-delay System in Continuous Fermentation Process

JI Yan[1], ZHAI Jingang[1], FENG Enmin[2]

(1.School of Mathematics and Statistics Science,Ludong University,Yantai 264039,China;
2.School of Mathematical Science,Dalian University of Technology,Dalian 116024,China)

Abstract:Considering that there may be a time-delay in the conversion of glycerol to 1,3-propanediol (1,3-PD) in continuous culture,a fractional order time-delay system is considered to describe the fermentation process,and the sensitivity of system states with respect to the parameters is discussed.The optimal control model of the fractional time-delay system for the continuous fermentation was formulated with a small sensitivity as the constraint,the glycerol dilution rate and feeding concentration as the optimization variable,and the maximum concentration of 1,3-PD at the terminal time as the performance index.By using the co-state method,the gradients of performance index and constraints with respect to optimization variables and parameters were obtained,and a optimization algorithm based on sequential quadratic programming (SQP) method was constructed.Finally,the numerical results were used to verify the effectiveness of the optimization strategies.

Keywords:fractional derivative;optimal control;time-delay;continuous fermentation

(责任编辑　顾建忠)