鲁东大学学报(自然科学版)
Journal of Ludong University(Natural Science Edition) 2024,40(1):76—80

Doi:10.20062/j.cnki.CN 37-1453/N.2024.01.009

一类半线性椭圆型方程解的存在性与渐近性

刘珊珊,王琳琳,樊永红

(鲁东大学 数学与统计科学学院,山东 烟台 264039)

摘要:本文研究了一类带有 Hardy 项的半线性椭圆型方程,利用上下解方法和比较原则,获得了该问题最大解和最小解的存在性以及正解在原点附近的渐近估计式。

关键词:上下解方法;比较原则;解的存在性;渐近性

中图分类号:O175.1 **文献标志码**:A **文章编号**:1673-8020(2024)01-0076-05

椭圆型方程一直以来都是学者们研究的重要课题。电磁学理论、弹性力学理论、流体力学理论、天文学的气体拖曳效应和引力透镜效应等与椭圆型方程有着很大的关系。椭圆型方程也是研究种群动力学的基础工具之一,文献[1]通过应用最大值原理和比较原理,研究了两个食饵和一个捕食者的捕食者—食饵模型入侵速度。而半线性椭圆型微分方程解的存在性以及在孤立奇点附近解的渐近性质是研究椭圆型方程的一个重要课题,许多学者对此进行了研究,并得出许多很好的结论。

文献[2]考察了如下带有 Logistic 源项的椭圆型方程:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u - b(x)u^p, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

其中,$\Omega \subset \mathbf{R}^N (N \geqslant 3)$,$b(x)$ 是 $\overline{\Omega}$ 上的非负连续函数,$p > 1$。该方程描述了种群增长符合 Logistic 定律,考虑到其生物学意义,文献[2]研究了该问题正解的存在性与唯一性及其相关性质。

对上述方程进行推广,考虑如下椭圆型方程:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda a(x)u - b(x)g(u), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中:$a(x)$,$b(x)$ 是 $\overline{\Omega}\backslash\{0\}$ 上的正连续函数;$g(u) \in C^1[0, +\infty)$,满足 $g(0) = 0$。在过去的几十年里,椭圆型方程(1)解的相关性质问题得到了广泛研究[3—5]。文献[6]研究了当 $a(x) = |x|^{-\alpha}(\alpha > 0)$ 时解在原点附近的奇异性,得到解的存在性、不存在性以及渐近性等相关结论。该研究是基于对某些物理现象的理解,如 Thomas-Fermi 理论中的中性原子之间的相互作用[7]。文献[8]研究了 $a(x)$ 是实参数的情况,并在 Dirichlet 边界条件、Neumann 边界条件和 Robin 边界条件下,推导出相关问题的存在唯一性结果。文献[9]研究了 $a(x) = |x|^{-2}$ 时的椭圆型方程,得到最大正解和最小正解的存在性,以及解在原点附近的爆破速率;文献[10]研究了一类特殊的带有 Hardy 项且 $b(x) = |x|^{\sigma}(\sigma > -2)$ 的椭圆型方程,得到其正解在原点附近的精确渐近估计。本文在文献[9—10]的基础上研究了一类带有 Hardy 项的半线性椭圆型微分方程,对一般项进行推广,研究解的存在性与渐近性。

1 问题描述

考虑椭圆型方程

收稿日期:2022-03-30;修回日期:2023-03-09

基金项目:国家自然科学基金(112012313);山东省自然科学基金(ZR2015AM026);山东省高校科技发展计划(J15LI07)

通信作者简介:王琳琳(1976—),女,教授,硕士研究生导师,博士,研究方向为非线性分析及微分方程。E-mail:wangll_1994@sina.com

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \dfrac{u}{|x|^2} - b(x)g(u), & x \in \Omega\backslash\{0\}, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

其中:$\Omega \subset \mathbf{R}^N (N \geqslant 3)$ 是光滑有界域,$0 \in \Omega$;$b(x) \in C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$ 是 $\overline{\Omega}$ 中的非负连续函数,$0 < \mu < 1$,令 $\Omega_0 = \{x \in \Omega : b(x) = 0\}$,$\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$,$\overline{\Omega}_0$ 是非空、连续且边界光滑的区域,在 $\Omega\backslash\overline{\Omega}_0$ 中有 $b(x) > 0$;$g(u) \in C^1[0, +\infty)$,且 $g(0) = 0$,此外 $g(u)$ 满足以下条件:

(i) $p > 1$,使得 $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{g(u)}{u} = 0$;

(ii) $p > 1$,使得 $\lim\limits_{u\to +\infty}\dfrac{g(u)}{u^p} = \eta > 0$;

(iii) Keller-Osserman 条件[11] 成立,即 $\int_1^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{G(t)}}\mathrm{d}t < \infty$,其中 $G(t) = \int_0^t g(s)\mathrm{d}s$。

为研究方便,对文中用到的空间和记号作简要说明:假设 $q \geqslant 1$,k 为非负整数,$W^{k,q}(\Omega) = \left\{u \in L^q : \mathrm{D}^{\alpha}u \in L^q,\ |\alpha| \leqslant k\right\}$;$C^m(\Omega)$ 表示 u 及其偏导 $\mathrm{D}^{\alpha}u(\alpha \leqslant m)$ 在 Ω 中均连续的函数空间,$C^{\infty}(\Omega) = \cap_{m=0}^{\infty}C^m(\Omega)$,$C_0^{\infty}(\Omega)$ 表示 $C^{\infty}(\Omega)$ 中所有在 Ω 中具有紧支集的函数空间;$H_0^1(\Omega)$ 是 $C_0^{\infty}(\Omega)$ 在 $W^{1,2}(\Omega)$ 中的闭包,$C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$ 表示 $\overline{\Omega}$ 上的 μ-hölder 连续的函数空间。

记 H 为 Hardy 常数,即 H 是使得 $\int_{\Omega}\dfrac{u^2}{|x|^2}\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{1}{H}\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x(\forall u \in H_0^1(\Omega))$ 成立的最佳常数。对于经典的 Hardy 不等式,Hardy 最佳常数 $H = \dfrac{1}{4}(N-2)^2$,且该常数不能在 $H_0^1(\Omega)$ 中得到,但可以表示为 $H = \inf\limits_{u\in H_0^1(\Omega)\backslash\{0\}}\int_{\Omega}|\nabla u|^2\mathrm{d}x \Big/ \int_{\Omega}\dfrac{u^2}{|x|^2}\mathrm{d}x$。记 $\lambda_1[c,b,\Omega]$ 为下列边值问题的第一特征值:

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u = \mu b(x)u, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

其中,$c(x)$ 是 $\overline{\Omega}$ 上的连续函数,$b(x)$ 是 $\overline{\Omega}$ 上的非负连续函数。记 $\lambda_1[b,\Omega] := \lambda_1[0,b,\Omega]$,$\lambda_1(\Omega) := \lambda_1[0,1,\Omega]$。

引理 1[9]　假设 Ω 是 $\mathbf{R}^N$ 中的有界域,$\alpha(x)$,$\beta(x)$ 是 Ω 上的连续函数,$\|\alpha\|_{\infty} < \infty$,$\beta(x)$ 非负且不恒为 0,$g_1(u)$ 连续,且 $\dfrac{g_1(u)}{u}$ 在 $\left(\min\{u_1,u_2\},\max\{u_1,u_2\}\right)$ 中关于 u 严格递增。设 $u_1, u_2 \in C^1(\Omega)$ 是 Ω 上的正函数,满足

$$\Delta u_1 + \alpha(x)u_1 - \beta(x)g_1(u_1) \leqslant 0 \leqslant \Delta u_2 + \alpha(x)u_2 - \beta(x)g_1(u_2), x \in \Omega,$$

且 $\lim\limits_{x\to\partial\Omega}\sup(u_2 - u_1) \leqslant 0$,则有 $u_2 < u_1$。

引理 2[8]　考虑如下方程:

$$\begin{cases} -\Delta u = a(x)u - b(x)f(u), & x \in \Omega\backslash\overline{\Omega}_0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \\ u = \infty, & x \in \partial\Omega_0, \end{cases} \tag{3}$$

其中:Ω 是 $\mathbf{R}^N (N \geqslant 3)$ 上的有界域,$0 \in \Omega$,$a(x)$ 在 $\overline{\Omega}\backslash\{0\}$ 上连续;$b(x) \in C^{0,\mu}(\overline{\Omega})(0 < \mu < 1)$,在 $\Omega\backslash\overline{\Omega}_0$ 中 $b(x) > 0$,$f(u)$ 满足条件(iii);另外,$b(x)$ 和 $f(u)$ 分别满足条件

(b) $b(x)$ 满足 $\lim\limits_{d(x)\to 0}\dfrac{b(x)}{k(d(x))} = c(c > 0)$,其中,$d(x) := d(x,\Omega_0)$,$0 < k \in C^1(0,\delta_0)$ 满足

$$K(t) = \frac{\int_0^t \sqrt{k(s)}\mathrm{d}s}{\sqrt{k(t)}} \in C^1[0,\delta_0), \delta_0 > 0;$$

(iv) $f(u) \in C^1[0,\infty)$,且$f(u) \geq 0$,$\frac{f(u)}{u}$在$(0,\infty)$上是递增函数,存在$\lim\limits_{u\to\infty}\left(\frac{F(u)}{f(u)}\right)' = r > 0$;

(v) 存在$\zeta > 0, t_0 > 1$,使得对$\forall \xi \in (0,1)$,$\forall t \geq \frac{t_0}{\xi}$,都有$f(\xi t) \leq \xi^{1+\zeta} f(t)$;

(vi) 映射$\xi \in (0,1]$ $A(\xi) = \lim\limits_{u\to\infty} \frac{f(\xi u)}{\xi f(u)}$是连续正函数;

则方程(3)有唯一正解。

引理3[9] 假设Ω是$\mathbf{R}^N$中的有界域,对于$\delta > 0$,记$\Omega^\delta = \Omega \backslash \bar{B}_\delta(0)$,其中$\bar{B}_\delta(0) = \{x \in \mathbf{R}^N : |x| \leq \delta\}$,则下述结论成立:

1) 若在Ω中,$b_1(x) \leq b_2(x)$,则$\lambda_1[c, b_2, \Omega] \leq \lambda_1[c, b_1, \Omega]$,当且仅当$b_1 = b_2$时等式成立;

2) 若在Ω中,$c_1(x) \leq c_2(x)$,则$\lambda_1[c_1, b, \Omega] \leq \lambda_1[c_2, b, \Omega]$,当且仅当$c_1 = c_2$时等式成立;

3) 若$0 < \delta_1 < \delta_2$,则$\lambda_1[c, b, \Omega^{\delta_1}] \leq \lambda_1[c, b, \Omega^{\delta_2}]$,当$\delta \to 0$时,$\lambda_1[c, b, \Omega^\delta] \to \lambda_1[c, b, \Omega]$。

引理4[9] Ω是$\mathbf{R}^N$中的有界域,对于$\delta > 0$,记$\Omega^\delta = \Omega \backslash \bar{B}_\delta(0)$,则有$\lim\limits_{\delta\to 0^+} \lambda_1[|x|^{-2}, \Omega^\delta] = \frac{1}{4}(N-2)^2$。

根据引理3可知,随着δ增大,$\lambda_1[|x|^{-2}, \Omega^\delta]$关于$\delta$递增。

2 主要结果

定理1 假设$b(x)$满足条件(b),$g(u)$满足条件(i)、(iii)~(vi),则当$\lambda > H$时,方程(2)有一个最大正解$U(x)$和一个最小正解$w(x)$。

证明 首先证明方程(2)有一个最大正解。

因为$b(x)$满足条件(b),$g(u)$满足条件(iii)~(vi),当$\lambda > H$时,由引理2知,方程

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{\lambda u}{|x|^2} - b(x)g(u), & x \in \Omega^\delta, \\ u = +\infty, & x \in \partial B_\delta(0), \\ u = 0, & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4}$$

有唯一正解,记为$U_\delta(x)$。对于$\bar{\Omega}\backslash\{0\}$的任一紧子集$K \subset \bar{\Omega}\backslash\{0\}$,选取$\gamma > 0$,使得$K \subset \Omega^\gamma \cup \partial\Omega$。对于任意小的常数$\delta \in (0,\gamma)$,利用比较原则可知,在$K$中,$\{U_\delta(x)\}$关于$\delta$是递增的,由此得$U(x) := \lim\limits_{\delta\to 0} U_\delta(x)$,且$U(x)$在$\Omega\backslash\{0\}$中是有意义的。根据椭圆型方程的正则性,$U(x)$是方程(2)的一个正解。假设$v(x)$是方程(2)的任一正解,容易得到,$v(x)$是方程(4)的一个下解。根据比较原则可得,在$\bar{\Omega}\backslash B_\delta(0)$中$v(x) \leq U_\delta(x)$,令$\delta \to 0^+$,可得$v(x) \leq U(x)$。由此可得,$U(x)$是方程(2)的最大正解。

根据引理4,$\lim\limits_{\delta\to 0^+} \lambda_1[|x|^{-2}, \Omega^\delta] = \frac{1}{4}(N-2)^2$,则存在$\delta_1 > 0$,$\Omega_1 \subset \Omega$且$0 \in \Omega_1$,使得当$\lambda > H$时,$\lambda_1[-\lambda|x|^{-2}, 1, \Omega_1^\delta] < 0$,$\delta \in (0, \delta_1)$。记$\varphi_\delta(x)$为$\lambda_1[-\lambda|x|^{-2}, 1, \Omega_1^\delta]$所对应的第一特征函数,得$\varphi_\delta(x) > 0$,$\varphi_\delta(x)$是方程

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{\lambda u}{|x|^{-2}} + \lambda_1[-\lambda|x|^{-2}, 1, \Omega_1^\delta]u, & x \in \Omega_1^\delta, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega_1^\delta \end{cases} \tag{5}$$

的正解。定义

$$\psi_\delta(x) = \begin{cases} \varphi_\delta(x), & x \in \Omega_1^\delta, \\ 0, & x \notin \Omega_1, \end{cases}$$

根据上、下解的定义,当$g(u)$满足条件(i)时,存在$\varepsilon > 0$,$g(\varepsilon\psi_\delta(x)) = o(\varepsilon\psi_\delta(x))$,显然$\varepsilon\psi_\delta$是方程

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{\lambda u}{|x|^2} - b(x)g(u), & x \in \Omega^\delta, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega^\delta \end{cases} \tag{6}$$

的一个下解,$U_\delta(x)$ 是方程(6) 的一个上解,由上下解定理及比较原则知,方程(6) 有唯一正解,记为 $w_\delta(x)$。利用比较原则,$w_\delta(x)$ 关于 δ 递减,且 $w_\delta(x) \leqslant U_\delta(x)$,$x \in \Omega^\delta$,所以 $w(x) := \lim\limits_{\delta \to 0^+} w_\delta(x)$,$x \in \Omega \backslash \{0\}$,由正则性理论知,$w(x)$ 是方程(2) 的一个正解。假设 $u(x)$ 是方程(2) 的任一正解,显然 $u(x) \geqslant w_\delta(x)$,令 $\delta \to 0^+$,$u(x) \geqslant w(x)$,因此 $w(x)$ 是问题(2) 的最小正解。

定理 2　假设 $b(x)$ 满足条件(b),$g(u)$ 满足条件(i) ~ (vi),$u(x)$ 是方程(2) 的任意一个正解,则当 $\lambda > H$ 时,存在 $\tau > 0$,以及依赖于 τ 的正常数 C_1 和 C_2,使得

$$C_2 |x|^{2/(1-p)} \leqslant u(x) \leqslant C_1 |x|^{2/(1-p)},\ \forall x \in B_\tau(0) \backslash \{0\}。\tag{7}$$

证明　因为 $b(x)$ 满足条件(b),$g(u)$ 满足条件(i) ~ (vi),由定理 1 的证明过程可知,方程(2) 的最大正解 U 满足方程

$$\begin{cases} -\Delta u = \dfrac{\lambda u}{|x|^2} - b(x)g(u), & x \in \Omega^0, \\ u = +\infty, & x = 0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega。\end{cases}$$

由条件(ii),对于任意 $\varepsilon > 0$,存在 $\tau_1 > 0$,使得 $\lim\limits_{x \in B_{\tau_1}(0) \backslash \{0\}} \dfrac{g(U(x))}{U^p(x)} = \eta > 0$。对于任意 $x_0 \in B_{2\tau_1/3}(0) \backslash \{0\}$,且 $d(x_0, \partial\Omega) > \dfrac{1}{2}|x_0|$,令 $D(x_0) = \left\{x \in \Omega: |x - x_0| < \dfrac{1}{2}|x_0|\right\}$。

首先证明 $u(x) \leqslant C_1 |x|^{2/(1-p)}$。对于任意 $x \in D(x_0)$,$|x| \geqslant \dfrac{1}{2}|x_0|$,有 $-\Delta U \leqslant 4\lambda |x_0|^{-2} U - b_{\mathrm{m}} g(U)$,$x \in D(x_0)$,$b_{\mathrm{m}}$ 是 $b(x)$ 在 $D(x_0)$ 中的最小值。

令 $V(x) = |x_0|^{2/(p-1)} U\left(x_0 + \dfrac{|x_0|}{2} x\right)$,注意到,对任意 $x \in B_1(0)$,$\left(x_0 + \dfrac{|x_0|}{2} x\right) \in B_{2\tau_1/3}(0) \subset B_{\tau_1}(0)$,得到

$$-\Delta V(x) \leqslant \lambda |x_0|^{2/(p-1)} U - \frac{1}{4}|x_0|^{2p/(p-1)} b_{\mathrm{m}} g(U) \leqslant \lambda |x_0|^{2/(p-1)} U - \frac{1}{4}|x_0|^{2p/(p-1)} b_{\mathrm{m}} (\eta - \varepsilon) U^p =$$
$$\lambda V - \frac{1}{4} b_{\mathrm{m}} (\eta - \varepsilon) V^p,\ x \in B_1(0)。\tag{8}$$

根据文献[2]的定理 6.10,方程

$$\begin{cases} -\Delta V(x) = \lambda V - \dfrac{1}{4} b_{\mathrm{m}} (\eta - \varepsilon) V^p, & x \in B_1(0), \\ V = +\infty, & x \in \partial B_1(0) \end{cases}\tag{9}$$

有唯一正解,记为 $W_\infty(x)$。由式(8) 可知,$V(x)$ 是方程(9) 的一个下解,利用比较原则,$V(x) \leqslant W_\infty(x)$,$x \in B_1(0)$。令 $x = 0$,得到 $U(x_0) \leqslant |x_0|^{2/(1-p)} W_\infty(0)$,由 x_0 的任意性,存在 $C_2 > 0$ 和 $\tau > 0$,使得对任意 $x \in B_\tau(0) \backslash \{0\}$,有 $U(x) \leqslant C_2 |x|^{2/(1-p)}$ 成立。

类似地,下面证明 $u(x) \geqslant C_2 |x|^{2/(1-p)}$。对于任意 $x \in D(x_0)$,$|x| \leqslant 2|x_0|$,有

$$-\Delta U \geqslant \frac{1}{4}\lambda |x_0|^{-2} U - b_{\mathrm{M}} g(U),\ x \in D(x_0),$$

其中,b_{M} 是 $b(x)$ 在 $D(x_0)$ 中的最大值。通过类似证明过程,可得

$$-\Delta V \geqslant \lambda V - \frac{1}{4} b_{\mathrm{M}} (\eta + \varepsilon) V^p,\ x \in B_1(0)。\tag{10}$$

由文献[2]的定理 6.10 可知,方程

$$\begin{cases} -\Delta V = \lambda V - \dfrac{1}{4} b_{\mathrm{M}} (\eta + \varepsilon) V^p, & x \in B_1(0), \\ V = +\infty, & x \in \partial B_1(0) \end{cases}\tag{11}$$

有唯一正解,记为 $V_\infty(x)$。由式(10)和比较原则可知,$V(x)$ 是方程(11)的一个上解,且 $V(x) \geqslant V_\infty(x)$,$x \in B_1(0)$。令 $x = 0$,可得 $U(x_0) \geqslant |x_0|^{-2/(p-1)} V_\infty(0)$,由 x_0 的任意性,存在 $C_1 > 0$ 和 $\tau > 0$,使得对任意 $x \in B_\tau(0)\setminus\{0\}$,都有 $U(x) \geqslant C_1 |x|^{-2/(p-1)}$ 成立,定理2得证。

注1 取 $g(u) = u^p$,则定理1、2的结论即为文献[9]的定理1,因此,本文结果是文献[9]中定理1的进一步推广。

3 结语

本文研究一类带有Hardy项的半线性椭圆型微分方程。对一般项施加条件,利用上下解方法找到方程的上解和下解,并利用比较原则证明最大正解和最小正解的存在性,进而证明解在原点附近的渐近性。未来可以考虑当 $g(u)$ 为指数函数、对数函数等其他组合形式时,解的性质是否可以类似论证。

参考文献:

[1] 张琪,王琳琳,樊永红. 捕食者-食饵模型的入侵速度[J]. 鲁东大学学报(自然科学版),2020,36(3):206-210.

[2] DU Y H. Order structure and topological methods in nonlinear partial differential equations[J]. Maximum Principles and Applications[M]. Singapore:World Scientific,2006.

[3] HIRANO N. Existence of positive entire solutions of semilinear elliptic equations on $\mathbf{R}^N$[J]. Abstract and Applied Analysis, 2007,1(1):65-82.

[4] CAO D,HAN P. Solutions for semilinear elliptic equations with critical exponents and Hardy potential[J]. Journal of Differential Equations,2004,205(2):521-537.

[5] 桂咏新,谢风繁,严国义,等. 一类半线性椭圆型方程正整体解的存在性[J]. 数学杂志,2006,26(2):155-160.

[6] CHENG X Y,FENG Z S,WEI L. Positive solutions for a class of elliptic equations[J]. Journal of Differential Equations, 2021,275:1-26.

[7] BREZIS H,LIEB E H. Long range atomic potentials in Thomas-Fermi theory[J]. Communications in Mathematical Physics,1979, 65(3):231-246.

[8] CIRSTEA F C,RADULESCU V D. Existence and uniqueness of blow-up solutions for a class of Logistic equations[J]. Communications in Contemporary Mathematics,2002,3(4):1-28.

[9] WEI L,FENG Z S. Isolated singularity for semilinear elliptic equations[J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2015,35(7):3239-3252.

[10] WEI L,DU Y H. Exact singular behavior of positive solutions to nonlinear elliptic equations with a Hardy potential[J]. Journal of Differential Equations,2017,262:3864-3886.

[11] KELLER J B. On solutions of $\Delta u = f(u)$[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics,1957,10(4):503-510.

Existence and Gradualism of Solutions for a Class of Semilinear Elliptic Equations

LIU Shanshan, WANG Linlin, FAN Yonghong

(School of Mathematics and Statistics Science,Ludong University,Yantai 264039,China)

Abstract:In this paper,a class of semilinear elliptic equations with Hardy-type terms are concerned. Using the upper and lower solution method and comparison principle,the existence of the maximum and minimum solutions and the asymptotic estimates of the positive solutions near the origin are obtained.

Keywords:upper and lower solution method;comparison principle;existence of solutions;asymptotic behavior

(责任编辑 顾建忠)